المعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية ـعمان

دورة حول
تقدير المجالات او المناطق الصغيرة

Small Domain or Area Estimation
2021/03/ 12 ،8 ،6 ،5

الدكتور عبدالحكيم عبدالحي عيده
استاذ مشارك في احصاءات ومنهجيات المسوح
جامعة القدس ـابو ديس ـفلسطين
a.eideh.3s@gmail.com
00970599662851

اليوم الثالث 8-4-2021
التقديرات غير المباشرة – استخدام المعلومات المساعدة
Indirect Estimation using Auxiliary Information

المحتويات

- التقديرات غير المباشرة
- مفهوم قوة الاستعارة
- المدرسة المعتمدة على النموذج
- طريقة المربعات الصغرى الموزونة
- تطبيق مسوحات القوة العاملة
- تقديرات المجالات بواسطة بناء النموذج
- المقدر التركيبي
- المقدر الموحد او المركب

مقدمة.

- مسوحات العينة نادرا ما تزودنا ببيانات كافية تسمح لنا بايجاد تقديرات دقيقة للمجموعات الجزئية الصغيرة من المجتمع باستخدام الطرق المعيارية بالاعتماد على احتمالات الاختيار او الانتماء.

- في مثل هذه الحالة الاجراء المناسب هو ايجاد التقدير المطلوب بالاعتماد على بيانات المجموعة الجزئية قيد الاهتمام ومضافا اليها بيانات من مجموعات جزئية مشابهه. لذلك تم استخدام المدرسة المعتمدة على النموذج.

مفهوم قوة الاستعارة

The concept of borrowing strength

- سوف نستخدم نوع مختلف في التفكير لبناء مقدر للمجموع الكلي في المجال، $t_{yd} = \sum_{U_d} y_k$، تسمى طريقة اعتماد النموذج (model based argument).

- (يمكن تفسير موضوع التقدير المستند إلى النموذج على نطاق واسع جدًا. تعتمد معظم فروع الإحصاء على النماذج بمعنى أن النتائج تستند إلى نماذج احتمالية صريحة تربط المعلومات غير المشاهدة بالمعلومات المشاهدة او المتاحة. السؤال هو: كيف يمكن استخدام النماذج الاحصائية لعمل تقديرات لمعالم المجتمع المحدود - المجاميع الكلية، ومعدلات المجتمع، والمجالات)

- اذا اعطينا مجال معين، المشاهدات y_k من خارج المجال المعين سوف تساهم في المقدرات. هذه المقدرات غير مباشرة – تستعير قوة من خارج المجال.

مثال:

- y_k - الاجور و الرواتب المدفوعة للموظفين من المؤسسة التجارية k.
- x_k - متغير مساعد احادي موجب، على سبيل المثال، عدد الموظفين في المؤسسة التجارية k.

- بالرغم من ان المقدرات التي تم مناقشتها في البنود السابقه تحاول استخدام المعلومات المساعدة المتوفرة على افضل امكانية، الا انها تعاني من بعض نقاط الضعف:

- حجم العينة الفعلي لهذه التقديرات هو n_d - عدد المشاهدات من العينة في المجال d ، U_d.

- هذا العدد n_d ممكن ان يكون صغير جدا.

- نتيجة منطقية، التباين يكون كبير جدا.

مثال: تقدير الانحدار الخطي البسيط لمعدل المجال d:

$$\bar{y}_{U_d} = N_d^{-1} \sum_{U_d} y_k$$

- هو

$$\hat{\bar{y}}_{d,reg} = \bar{y}_{sd} + \hat{\beta}_d \left(\bar{X}_{U_d} - \bar{x}_{sd} \right)$$

$$V\left(\hat{\bar{y}}_{d,reg} | n_d \right) \approx \frac{S_{yd}^2 \left(1 - \rho_d^2 \right)}{n_d}$$

- لاحظ $V\left(\hat{\bar{y}}_{d,reg} | n_d \right)$ يزيد بنقصان n_d

- لحل هذه المشكلة، سوف نفكر بطريقة مختلفة- مدرسة اعتماد النموذج (Model-based school). لتقدير معالم المجالات قيد الاهتمام. على سبيل المثال

- الهدف: تقدير $t_{yd} = \sum_{U_d} y_k$. مدرسة اعتماد النموذج

- افرض ان قيم المجتمع x_k و y_k هي عينة عشوائية من نموذج اكبر:

$$y_k = \beta x_k + \varepsilon_k, k = 1, \dots, N$$

- حيث ان ε_k متغيرات عشوائية مستقلة عن المتغير الثابت المعلوم $x_k > 0$، توقع ε_k تحت النموذج هو $E_M(\varepsilon_k) = E_\xi(\varepsilon_k) = 0$

- بعبارة اخرى، $y_k \approx \beta x_k$.

- هذا يعبر عن فرضية معقولة،الاجور والرواتب المدفوعة للموظفين من المؤسسة التجارية k تقريبا تتناسب مع عدد الموظفين في المؤسسة التجارية k.

- خطوات تقدير $t_{yd} = \sum_{U_d} y_k$ بالاعتماد على لنموذج:

- (1) اوجد المقدر $\hat{\beta}$ ل β.

- (2) احسب تنبؤ قيم y_k: $\hat{y}_k = \hat{\beta} x_k$.

- (3) المقدر ل $t_{yd} = \sum_{U_d} y_k$:

$$\hat{t}_{yd} = \sum_{U_d} \hat{y}_k = \sum_{U_d} \hat{\beta} x_k = \hat{\beta} \sum_{U_d} x_k = t_{xd} \hat{\beta}$$

- المعلومات المساعدة المطلوبة: مجموع المجال U_d للمتغير المساعد x، $t_{xd} = \sum_{U_d} x_k$ معلوم.

- المسألة الان هي تقدير β: على اي مستوى يجب ان نقدر β

- **الحالة الاولى: مستوى المجال. نستخدم معلومات عينة المجال s_d:**
- **هنا نعتمد النموذج النسبي لكل مجال:**

$$y_k = \beta x_k + \varepsilon_k, k = 1, \dots, N_d$$

- **حيث ان ε_k متغيرات عشوائية مستقلة عن المتغير الثابت المعلوم $x_k > 0$.**
- **توقع ε_k :** $E_M(\varepsilon_k) = E_\xi(\varepsilon_k) = 0$
- **تباين ε_k :** $\boldsymbol{V_M(\varepsilon_k) = V_\xi(\varepsilon_k) = \sigma_d^2 x_k}$
- **طريقة المربعات الصغرى الموزونة:**

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{d}} = \frac{\sum_{s_d} \boldsymbol{a_k y_k}}{\sum_{s_d} \boldsymbol{a_k x_k}}$$

- **مستوى المجال، المقدر ل $t_{yd} = \sum_{U_d} y_k$:**

$$\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{yd1}} = \boldsymbol{t_{xd}} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{t_{xd}} \frac{\sum_{s_d} \boldsymbol{a_k y_k}}{\sum_{s_d} \boldsymbol{a_k x_k}}$$

- **التقدير $\hat{t}_{yd1}$: تقديرمباشر - يستخدم قيم y فقط من المجال قيد الاهتمام نفسة.**
- **يكافىء التقدير النسبي الاول للمجموع الكلي للمجال U_d، $\hat{t}_{yd1}$**

- **الحالة الثانية: مستوى المجتمع. نستخدم معلومات العينة s:**

تقديرات المجالات باستخدام النماذج الاحصائية - المقدر التركيبي (synthetic estimator)

- **المقدر التركيبي يشير الى استعارة المعلومات من مجالات صغيرة مشابة للمجال قيد الدراسة من اجل زيادة دقة التقديرات الناتجة.**

- **الحالة العامة: تسمح بتعدد ابعاد متجه المعلومات المساعدة**
$$x_k = \left(x_{1k}, \dots, x_{jk}, \dots, x_{qk}\right)'$$

- **حيث x_{jk} قيمة المتغير المساعد j للعنصر k، و $j = 1, \dots, J$ و $k = 1, \dots, N$.**

- **نفرض ان x_k يزودنا بتفسير جيد لمتغير المسح y_k. سوف نبني المقدر بالاعتماد على قيم متنبأة $\hat{y}_k$ والناتجة من ملائمة نموذج.**

- **هذا المقدر يستخدم معلومات العينة $\{(x_k, y_k), k \in s\}$، لذلك اكثر استقرارا من $\hat{\beta}_d$ الذي يستخدم معلومات عينة المجال $\{(x_k, y_k), k \in s_d\}$.**

- **هنا نعتمد النموذج النسبي في المجتمع:**

$$y_k = \beta x_k + \varepsilon_k, k = 1, \dots, N$$

- **حيث ان ε_k متغيرات عشوائية مستقلة عن المتغير الثابت المعلوم $x_k > 0$**
- **توقع ε_k: $E_M(\varepsilon_k) = E_\xi(\varepsilon_k) = 0$.**
- **تباين ε_k: $V_M(\varepsilon_k) = V_\xi(\varepsilon_k) = \sigma^2 x_k$**

- **طريقة المربعات الصغرى الموزونة:**

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\sum_s \boldsymbol{a_k y_k}}{\sum_s \boldsymbol{a_k x_k}}$$

- **مستوى المجتمع**، المقدر ل $t_{yd} = \sum_{U_d} y_k$:

$$\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{yd2}} = \boldsymbol{t_{xd}}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{t_{xd}} \frac{\sum_s \boldsymbol{a_k y_k}}{\sum_s \boldsymbol{a_k x_k}} = \hat{t}_{yd,SYN}$$

- التقدير $\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{yd2}}$: تقدير غير مباشر - يستخدم قيم y من خارج المجال قيد الاهتمام نفسة.

$$\text{Bias}(\hat{t}_{yd,SYN}) = E(\hat{t}_{yd,SYN} - t_{yd}) = E(\hat{t}_{yd,SYN}) - t_{yd}$$
$$= -\sum_{U_d} E_k = -\sum_{U_d} (y_k - \boldsymbol{x_k} B)$$

- هذا يعني ان الشرط الازم لعدم تحيز المقدر التركيبي $\hat{t}_{yd,SYN}$ هو: $\sum_{U_d} E_k = 0$.
- بشكل عام، المقدر التركيبي $\hat{t}_{yd,SYN}$ متحيز، الا في الحالات التي يكون فيها $\sum_{U_d} E_k = 0$.

- تباين المقدر التركيبي $\hat{t}_{yd,SYN}$:

$$V = \left(\frac{\boldsymbol{t_{xd}}}{\sum_s \boldsymbol{a_k x_k}}\right)^2 \sum\sum_s (a_k a_l - a_{kl})\,(x_k e_k)(x_l e_l)$$
$$e_k = y_k - \hat{\beta} x_k$$

- ملاحظة. التقدير التركيبي في سياق المناطق الصغيرة اساسيا يفرض ان العلاقة الموجودة في المساحة الكبيرة تتحقق لكل مساحة صغيرة محتواة في المساحة الكبيرة.

- **المقايضة بين التباين و التحيز: اي التقديرين $\hat{t}_{yd1}$ و$\hat{t}_{yd2}$ افضل.**
- **التقدير الاول – مستوى المجال.**

$$\hat{t}_{yd} = \hat{t}_{yd1} = t_{xd}\hat{\beta}_d = t_{xd}\frac{\sum_{s_d} a_k y_k}{\sum_{s_d} a_k x_k}$$

- **الخصائص الاحصائية:**
- **(1)** $\hat{t}_{yd1}$ **تقريبا غير متحيز ل** $t_{yd} = \sum_{U_d} y_k$
- **(2)** $V(\hat{t}_{yd1})$ **جدير بالاعتبار عندما** n_d **- عدد المشاهدات في المجال** d, U_d **صغيرة جدا.**
- **(3)** $\hat{t}_{yd1}$ **تقدير مباشر**
- **التقدير الثاني – مستوى المجتمع-التقدير التركيبي**

$$\hat{t}_{yd,SYN} = \hat{t}_{yd2} = t_{xd}\frac{\sum_s a_k y_k}{\sum_s a_k x_k}$$

- **الخصائص الاحصائية:**
- **(1) تحيز** $\hat{t}_{yd2}$ **ل** $t_{yd} = \sum_{U_d} y_k$ **جدير بالاعتبار (متحيز -مدرسة التصميم)**
- **(2)** $V(\hat{t}_{yd2}) < V(\hat{t}_{yd1})$ **بسبب ان** $\hat{t}_{yd2}$ **يستخدم معلومات العينة** $\{(x_k, y_k), k \in s\}$.
- **(3)** $\hat{t}_{yd1}$ **تقدير غير مباشر**

تطبيق. مسوحات القوة العاملة.

- العمر: 15 - 74
- افرض ان الصفة قيد الدراسة B = الانتماء الى القوة العاملة
- $y_k = 1$ لكل الافراد $k \in U$ والتي تحمل الصفة B = لا يعمل
- $y_k = 0$ لكل الافراد $k \in U_d$ والتي لا تحمل الصفة B
- **الهدف:** تقدير $t_{yd} = \sum_{U_d} y_k$- عدد العاطلين عن العمل في المجال U_d (منطقة صغيرة من المجتمع U الذي سحبت منه العينة s).
- افرض وجود متغير مساعد x:
- $x_k = 1$ لكل الافراد $k \in U_d$ الذين يقيمون في المنطقة (المجال) U_d
- $x_k = 0$ لكل الافراد $k \in U_d$ الذين لا يقيمون في المنطقة المجال U_d
- افرض ان المجموع المساعد $t_{xd} = \sum_{U_d} x_k = N_d$ معلوم – عدد البالغين في المنطقة المجال U_d
- هذا العدد ممكن الحصول عليه بدقة من نتائج المسوحات المحدثة.
- افرض ان β معدل البطالة لكل مقيم بالغ

- **المقدر الاول** ل $t_{yd} = \sum_{U_d} y_k$ **-لعدد العاطلين عن العمل في المجال** U_d
- **مستوى المجال:**

$$\hat{t}_{yd1} = t_{xd}\hat{\beta}$$

- $\hat{\beta}$ **مقدر ل** β

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_d = \frac{\sum_{s_d} a_k y_k}{\sum_{s_d} a_k x_k}$$

- **مقياس موزون لمعدل البطالة لكل مقيم بالغ في المنطقة قيد الاهتمام.**

- **المقدر االثاني** ل $t_{yd} = \sum_{U_d} y_k$ **: نستخدم معلومات العينة** s**:**

$$\hat{t}_{yd2} = t_{xd}\hat{\beta}$$

- $\hat{\beta}$ **مقدر ل** β **- مستوى المجتمع.**

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_s a_k y_k}{\sum_s a_k x_k}$$

- **لذلك**

$$\hat{t}_{yd2} = t_{xd}\hat{\beta} = t_{xd}\frac{\sum_s a_k y_k}{\sum_s a_k x_k}$$

- **مقياس موزون لمعدل البطالة لكل مقيم بالغ في البلد (المجتمع الكلي).**

- $V(\hat{t}_{yd2})$ **- صغير جدا بسبب اعتمادة على العينة الكلية.**
- **نثق بالمقدر** $\hat{t}_{yd2} = t_{xd}\hat{\beta}$ **الذي يستعير قوة من المجالات الاخرى، اذا كان**

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_s a_k y_k}{\sum_s a_k x_k} \text{ يساوي } \hat{\beta}_d = \frac{\sum_{s_d} a_k y_k}{\sum_{s_d} a_k x_k}$$

المقدرات المركبة – بدون معلومات مساعدة composite estimator

- المقدر المركب يعتمد على مجموعة مختلفة من المقدرات
-
- سوف نفحص كيف ان بعض المقدرات الركبة يمكن الحصول عليها باستخدام مدرسة اعتماد النموذج.

- افرض ان y_{ij} ترمز الى الصفة قيد الاهتمام (متغير المسح) للوحدة j في المنطقة i ، حيث $j = 1, \dots, N_i$ ، $i = 1, \dots, m$.

- لتسهيل المفاهيم، افرض ان

- y_{ij} $(j = 1, \dots, n_i \geq 0; i = 1, \dots, m)$ ترمز الى متغيرات المسح المرافقة لوحدات المعاينة في هذه المناطق.

- معدل مجتمع المنطقة i:

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} y_{ij},\ i = 1, \dots, m$$

- الهدف: تقدير معدل مجتمع المنطقة i ، مثل، نسبة الاشخاص الفقراء في المنطقة i $(\bar{Y}_i = P_i)$.

- المقدرات المباشرة ل $\bar{Y}_i$ هي معدلات العينة المرافقة:

$$\hat{\bar{Y}}_i = \bar{y}_{is} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij},\ i = 1, \dots, m$$

- ملاحظة. اذا كان $n_i = 0$، بمعنى انه لا يوجد وحدة معاينة في المنطقة i ، نحن في مشكلة، و لا نستطيع حساب $\hat{\bar{Y}}_i = \bar{y}_{is}$

- **المقدر المركب (عام لكل المناطق) هو المعدل الكلي:**

$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} = \sum_{i=1}^{m} w_i \bar{y}_i$$

$$w_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

- **لاحظ ان $\bar{y}_s$ مقدر موزون للتقديرات المباشرة $\bar{y}_{is}$، $i = 1, \dots, m$.**

- **المقدر الموحد لمعدل مجتمع المنطقة i هو المعدل الموزون من المقدرين:**

- **معدل عينة المنطقة i ، $\bar{y}_{is}$ و المعدل الكلي $\bar{y}_s$:**

$$\hat{\bar{Y}}_i^c = w_i \bar{y}_{is} + (1 - w_i)\bar{y}_s, \; i = 1, \dots, m$$

- **حيث w_i وزن يتم اختيارة بشكل ملائم، $0 \le w_i \le 1$.**

- **ملاحظة. اذا كان $w_i = 1$، فان $\hat{\bar{Y}}_i^c = \bar{y}_i^c$**

- **اذا كان $w_i = 0$، فان $\hat{\bar{Y}}_i^c = \bar{y}_s$**

- **السؤال الطبيعي هو كيف نختار الاوزان w_i لكل $i = 1, \dots, m$.**
- **اذا كان N_i معلوم، لكل $i = 1, \dots, m$ فان**

$$\boldsymbol{w_i = \frac{n_i}{N_i}} \text{ او } \boldsymbol{w_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{\sum_{i=1}^{m} N_i}}$$

تطبيق:

- **اقليم صغير يوجد فية 500 اسرة. اخترنا عينة عشوائية بسيطة بدون ارجاع حجمها 50.**

- **من ضمن نتائج العينة، ركزنا على المصاريف الكلية الشهرية (معدل 5 سنوات).**

- **شاهدنا ان 15 اسرة في العينة تقيم في منازل ملكية خاصة والباقي يقيم في منازل مستاجرة.**

- **من الطبيعي ان هاتين المجموعتين لهما مصاريف مختلفة. نحن بحاجة الى تقديرين منفصلين للمصاريف الشهرية**

بيانات العينة معطاة في الجدول التالي:

العينة	المستاجرين	المالكين
الحجم	15	35
معدل المصاريف	1850	2050
الانحراف المعياري	15.8	14.5

- **افرض اننا نعلم ان 40% من الاسر في الاقليم تقيم في منازل ملكية خاصة.**
- **احسب التقدير المركب للمصاريف في كل منطقة.**

- **التقدير المباشر لمعدل المصاريف الشهرية للمالكين**
- **(المنطقة 1):**

$$\hat{\bar{Y}}_1 = \bar{y}_{1s} = \frac{1}{35}\sum_{j=1}^{35} y_{ij} = 2050$$

- التقدير المباشر لمعدل المصاريف الشهرية للمستاجرين
- (المنطقة 2):

$$\hat{\bar{Y}}_2 = \bar{y}_{2s} = \frac{1}{15}\sum_{j=1}^{15} y_{ij} = 1850$$

- التقدير المركب (عام لكل هذه المناطق) هو المعدل الكلي:

$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} = \frac{(35)(2050)+(15)(1850)}{50} = 1990$$

- المقدر المركب لمعدل مجتمع المنطقة i هو المعدل الموزون من المقدرين:
-

$$\hat{\bar{Y}}_i^c = w_i \bar{y}_{is} + (1 - w_i)\bar{y}_s,\ i = 1, m = 2$$

- حيث $w_1 = 0.40$
- المقدر المركب لمعدل المصاريف الشهرية للمالكين (المنطقة 1)

$$\begin{aligned}\hat{\bar{Y}}_1^c &= w_1 \bar{y}_{1s} + (1 - w_1)\bar{y}_s \\ &= (0.4)(2050) + (1 - 0.4)(1990) \\ &= 2014\end{aligned}$$

- المقدر المركب لمعدل مجتمع المنطقة i :

$$\hat{\bar{Y}}_i^c = w_i \bar{y}_{is} + (1 - w_i)\bar{y}_s,\ i = 1, \ldots, m$$

المقدر المركب –وجود معلومات مساعدة

- **سوف نفحص كيف ان بعض المقدرات الموحدة يمكن الحصول عليها باستخدام مدرسة اعتماد النموذج.**

- **افرض ان y_{ij} ترمز الى الصفة قيد الاهتمام (متغير المسح) للوحدة j في المنطقة i ، حيث $i = 1, \dots, m$,$j = 1, \dots, N_i$**

- **المتجهات المرافقة للصفات المساعدة (المتغيرات المساعدة) نرمز لها x_{ij}، $i = 1, \dots, m$,$j = 1, \dots, N_i$. للتسهيل، سوف نفرض ان x_{ij} متغير مساعد احادي.**

- **المقدر المباشر لمعدل مجتمع المنطقة i:**

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} y_{ij},\ i = 1, \dots, m$$

- **هو المقدر النسبي ل $\bar{Y}_i$ -مستوى عينة المجال:**

$$\hat{\bar{Y}}_i^R = \frac{\bar{y}_{is}}{\bar{x}_{is}}\bar{X}_i$$

- **حيث**

$$\bar{X}_i = \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}$$

$$\bar{x}_{is} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

$$\bar{y}_{is} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

- المقدر النسبي التركيبي ل $\bar{Y}_i = \bar{y}_i$ مستوى عينة المجتمع:

$$\hat{\bar{Y}}_i^{RS} = \frac{\bar{y}_s}{\bar{x}_s}\bar{X}_i$$

- حيث

$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

- المقدر المركب لمعدل مجتمع المنطقة i هو المعدل الموزون من المقدرين: $\bar{y}_{is}$ و $\hat{\bar{Y}}_i^{RS}$:

$$\hat{\bar{y}}_i^{*} = \frac{\boldsymbol{n_i}}{\boldsymbol{N_i}}\bar{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{is}} + \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{n_i}}{\boldsymbol{N_i}}\right)\hat{\bar{Y}}_i^{RS}$$

$$= \frac{\boldsymbol{n_i}}{\boldsymbol{N_i}}\bar{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{is}} + \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{n_i}}{\boldsymbol{N_i}}\right)\frac{\bar{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{is}}}{\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{is}}}\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{i}},\ \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{m}$$

- المقدر المركب البديل لمعدل مجتمع المنطقة i:

$$\hat{\bar{y}}_i^{C} = \frac{n_i}{N_i}\bar{y}_{is} + \left(1 - \frac{n_i}{N_i}\right)\frac{\bar{y}_s}{\bar{x}_s}\bar{X}_i',\ i = 1, \dots, m$$

- حيث: $\bar{X}_i' = \frac{1}{N_i - n_i}\sum_{j=n_i+1}^{N_i} x_{ij}$

تطبيق:

- **افرض انه في دولة ما**
- Y_{ij} **ترمز الى الاجور و الرواتب للشركة** j **في قسم المسح** i
- X_{ij} **ترمز الى الدخل الاجمالي للشركة** j **في قسم المسح** i **(مليون دولار)**
- $\bar{Y}_i$ **و** $\bar{X}_i$ **معدل المناطق** $(i = 1,2,3, m = 4)$
- **سحبنا عينة عشوائية بسيطة بدون ارجاع حجمها** $n = 10$ **شركات اعمال من** $N = 100$ **ورمزنا لقيم العينة** (x_{ij}, y_{ij}) $j = 1, \dots, n_i$ **و** $i = 1,2,3,4$**. افرض اننا حصلنا على البيانات التالية:**

عينة عشوائية بسيطة بدون ارجاع حجمها $n = 10$

المنطقة	n_i	x_{ij}	$\bar{x}_i$	y_{ij}	$\bar{y}_i$
1	2	30	35	6	9
		40		12	
2	3	35	31	2	5
		28		3	
		30		10	
3	3	100	95	40	25
		110		25	
		75		10	
4	3	150	135	23	20
		120		17	

المنطقة	N_i	$\bar{X}_i$	$\bar{Y}_i$
1	15	55	12
2	30	45	8
3	45	92	22
4	10	125	25

$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} = \sum_{i=1}^{m} w_i \bar{y}_i \, , w_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

- **المقدر النسبي التركيبي ل $\bar{\mathbf{Y}}_\mathbf{i}$ $(\mathbf{i} = \mathbf{1, 2, 3, m} = \mathbf{4})$:**

$$\hat{\bar{Y}}_i^{RS} = \frac{\bar{y}_s}{\bar{x}_s} \bar{X}_i$$

- **حيث**

$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^{4} n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{4} n_i} = 14.8$$

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{4} n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{4} n_i} = 71.8$$

- **وعليه:**

$$\hat{\bar{Y}}_i^{RS} = \frac{\bar{y}_s}{\bar{x}_s} \bar{X}_i$$
$$= \frac{14.8}{71.8} \bar{X}_i$$

لذلك:

المنطقة	**1**	**2**	**3**	**4**
$\hat{\bar{Y}}_i^{RS}$	**11.34**	**9.28**	**18.96**	**25.7**

- **المقدر المركب ل $\bar{\boldsymbol{Y}}_\boldsymbol{i}$ $(\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1, 2, 3, m} = \boldsymbol{4})$:**

$$\hat{\bar{y}}_i^* = \frac{n_i}{N_i} \bar{y}_{is} + \left(1 - \frac{n_i}{N_i}\right) \hat{\bar{y}}_i^{RS}$$
$$= \frac{n_i}{N_i} \bar{y}_{is} + \left(1 - \frac{n_i}{N_i}\right) \frac{\bar{y}_{is}}{\bar{x}_{is}} \bar{X}_i$$

لذلك

المنطقة	**1**	**2**	**3**	**4**
$\hat{\bar{y}}_i^*$	**11.02**	**8.85**	**19.36**	**24.56**