نموذج لندلي ذي المعلمتين للانحدار الذاتي-الأوساط المتحركة من الرتبة الأولى مع التطبيق

د. بشير جميل خليل / مدرس في وزارة التربية العراقية
د. علي محمد علي / مدرس في جامعة ميسان، كلية الإدارة والاقتصاد، قسم الاقتصاد
ازهار سالم احمد / مديرية إحصاء نينوى

تاريخ استلام البحث: 2023/09/19

تاريخ قبول البحوث: 2023/11/23

نشر البحث في العدد الثالث والعشرين: حزيران / يونيو 2024

رمز التصنيف ديوي / النسخة الالكترونية (Online): 2522-64X/515.7

رمز التصنيف ديوي / النسخة الورقية (Print): 2519-948X/515.7

نموذج لندلي ذي المعلمتين للانحدار الذاتي-الأوساط المتحركة من الرتبة الأولى مع التطبيق

د. بشير جميل خليل / مدرس في وزارة التربية العراقية
د. علي محمد علي / مدرس في جامعة ميسان، كلية الإدارة والاقتصاد، قسم الاقتصاد
ازهار سالم احمد / مديرية إحصاء نينوى

المستخلص

تم في هذا البحث اقتراح نموذج سلاسل زمنية جديد من نوع ARMA(1,1) عندما تتبع البواقي توزيع لندلي ذي المعلمتين، حيث تم تقديم فكرة عامة عن توزيع لندلي ذي المعلميتن ونماذج بوكس جنكز، وتقدير معلمات النموذج المقترح بالاعتماد على طريقة الإمكان الأعظم، ومن ثم تمت مقارنة النموذج الجديد مع نماذج أخرى هي كل من النموذج الطبيعي والأسي والأسي ذي المعلمتين ولندلي بواسطة مجموعتين من البيانات الحقيقية وتمثلت هذه البيانات في سرعة الرياح في العراق وتدفق نهر Somerset Yeo في المملكة المتحدة وقد أثبتت النتائج تفوق النموذج المقترح على كافة النماذج الأخرى وبالنسبة لمجوعتي البيانات.

Two-Parameter Lindley ARMA(1,1) Model with Applications

Dr. Basheer Jameel Khaleel Lecturer in Ministry of Education, Iraq
Dr. Ali Mohammed Ali Lecturer in Misan University, college of Administration & Economics, Economics department
Azhar Salim Ahmed Nineveh Statistics Directorate

Abstract

In this research, a new ARMA(1,1) time series model was proposed when residuals follow the two-parameter Lindley distribution. A general idea of the two-parameter Lindley distribution and Box-Jenkins models was presented. The parameters of the proposed model were estimated using the method of maximum likelihood. Then, the new model was compared with other models, namely the normal, exponential, two-parameter exponential, and Lindley models, using two sets of real-world data. These data sets represented wind speed in Iraq and the flow of the Somerset Yeo river in the United Kingdom. The results demonstrated the superiority of the proposed model over all other models for both data sets.

1- المقدمة

تعتبر السلاسل الزمنية من الأساليب الإحصائية المستخدمة في تحليل الكثير من الظواهر التي تتصف بصفة التغير عبر الزمن والتي من خلالها يمكن معرفة طبيعة التغيرات التي تطرأ على قيم تلك الظواهر مع الزمن ومن ثم تحديد النتائج بهدف التنبؤ بالقيم المستقبلية لها والذي يعتبر الهدف الأساس من تحليل تلك الظواهر، وقد تم دراسة السلاسل الزمنية في الكثير من التخصصات والتطبيقات الحديثة مثل التنبؤ بالسلسلة الزمنية المالية، والطبية والهندسية

ومعالجة الإشارات، والأحدث في مجالات التعلم الآلي والتعرف على الأنماط (Privalsky, 2023).

تستخدم التوزيعات الملتوية كبديل عن التوزيع الطبيعي في كثير من التطبيقات في الحياة العملية، وذلك لأن هذه الظواهر في الكثير من الأحيان لا تخضع للتوزيع الطبيعي الذي يمتاز بأنه توزيع متماثل، ومن التوزيعات الشائعة في هذا الجانب التوزيع الأسي ذي المعلمة والتوزيع الأسي ذي المعلمتين وتوزيع گاما وغيرها الكثير من التوزيعات الاحتمالية. بالإضافة إلى هذه التوزيعات هناك ما يسمى التوزيعات المختلطة Mixed Distribution والتي تعرف بأنها خليط من توزيعين أو أكثر، وسبب ظهور هذه العائلة من التوزيعات هو وجود ظواهر مقسمة إلى عدة أقسام وكل قسم يخضع لتوزيع معين، حيث يكون المجتمع النهائي هو خليط من هذه التوزيعات بنسب معينة لكل توزيع احتمالي (Rachev et al., 2005).

إن افتراض التوزيع الطبيعي في تحليل البيانات الإحصائية عموماً والسلاسل الزمنية خصوصاً هي مسألة بعيدة عن الواقع في العديد من الحالات. نتيجة لذلك، تم إدخال العديد من نماذج السلاسل الزمنية غير الطبيعية في الأدبيات خلال العقود الأربعة الماضية، لوصف السمات البارزة للبيانات، والتي لم يتم التقاطها من خلال التوزيع الطبيعي (Balakrishna, 2021). نذكر هنا على سبيل المثال بعض الأمثلة على استخدام نماذج ARMA مع توزيعات غير طبيعية كالتوزيع الأسي (Lawrance & Lewis, 1980) وتوزيع گاما (Sim, 1987) وتوزيع لابلاس (Damsleth & El-Shaarawi, 1989). ومؤخراً التوزيع الأسي ذي المعلمتين (حسوني وغني، 2021) توزيع لندلي ((Bakouch & Popović, 2016) و(حسوني وغني، 2022)) وتوزيع بور (de Araújo et al., 2023).

يهدف البحث إلى بناء نموذج انحدار ذاتي-الأوساط المتحركة (ARMA) Autoregressive-Moving Average، عندما يكون للأخطاء توزيع لندلي ذي المعلمتين، ولتحقيق هدف البحث تم تقسيم ما تبقى منه إلى عدة أقسام، حيث يتناول القسم الثاني نماذج الانحدار ذاتي-الأوساط المتحركة (ARMA)، بينما يضم القسم الثالث توزيع لندلي ذي المعلمتين، والقسم الرابع لتقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة الإمكان الأعظم، والقسم الخامس الجانب التطبيقي، فيما اختص القسم السادس بأهم الاستنتاجات التي توصل إليها البحث.

2- نماذج الانحدار ذاتي-الأوساط المتحركة

تلعب السلاسل الزمنية المستقرة دوراً بارزاً في تحليل بيانات السلاسل الزمنية حيث قدم بوكس جينكز Box- Jenkins نهجاً علمياً ومتكاملاً لبناء النماذج الذي تم استخدامه على مدار نصف القرن الماضي. إذا كانت السلسلة Y_t فأن نموذج انحدار ذاتي-الأوساط المتحركة ARMA(p,q)، حيث p رتبة الانحدار الذاتي وq رتبة الأوساط المتحركة يكون كما يأتي (Woodward et al., 2022):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad (1)$$

إذ إن كل من $\phi_k, k = 1, \dots, p$ و $\theta_k, k = 1, \dots, q$ هي ثوابت حقيقية، وإن ε_t هو الخطأ العشوائي. وكحالة خاصة من هذا النموذج نموذج ARMA(1,1) بمعنى أن رتبة كل من الانحدار الذاتي ورتبة الأوساط المتحركة تساوي 1، أي إن p=q=1، فيمكن كتابة المعادلة (1) كما يأتي:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} \qquad (2)$$

وقد أعاد الباحثان (Kasraie & Sayyareh, 2020) صياغة المعادلة (2) بدلالة الأخطاء العشوائية وكما يأتي:

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{t-2} \theta^j \left(Y_{t-j} - \phi Y_{t-j-1}\right) + \theta^{t-1}\varepsilon_1, t = 2,3,\ldots,n \quad (3)$$

إذ إن $\varepsilon_t = E(\varepsilon_t)$، عندما $E(\varepsilon_t)$ يمثل توقع الخطأ (الجدول 1).
تمتاز المعادلة (3) بأن هناك استقلالية بين قيم السلسلة a_t.

3- توزيع لندلي ذي المعلمتين

يمتاز توزيع لندلي Lindley Distribution بأنه أحد التوزيعات المختلطة المستمرة، وقد سُمي بهذا الاسم تيمنًا بالباحث لندلي Lindley الذي قدم هذا التوزيع في عام 1958. يتكون هذا التوزيع من دمج متغيرين عشوائيين، حيث يتبع أحدهما التوزيع الأسي بمعلمة (λ)، بينما يتبع المتغير الآخر توزيع گاما بالمعلمتين (α = 2, λ) بوزن $\left(w_1 = \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$ وتعرف دالة الكثافة الاحتمالية Probability Density Function (PDF) للمتغير العشوائي X الذي يتبع هذا التوزيع كما في الصيغة الآتية (Ghitany et al., 2008):

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda+1}(1+x)e^{-\theta x}\ ;, x > 0\ , \lambda \geq 0 \quad (4)$$

بينما يتم التعبير عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لندلي ذي المعلمتين Two-Parameter Lindley Distribution الذي اقترح من قبل (Shanker, Sharma & Shanker) في عام 2013 كما يأتي (Shanker et al., 2013):

$$f(x;\alpha,\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda+\alpha}(1+\alpha x)e^{-\lambda x}\ , x > 0\ , \lambda \geq 0, \alpha > -\lambda \quad (5)$$

وقد استعمل الباحثون الوزن $w_1 = \frac{\theta}{\theta+\alpha}$ بنفس التوزيعات المستعملة في توزيع لندلي ذي معلمة واحدة.
وقد وضع الباحثون في هذا البحث جدولاً يحتوي على دالة الكثافة الاحتمالية والتوقع لكل توزيع من التوزيعات التي سيتم نمذجة ARMA بها بالنسبة للخطأ العشوائي، وكما يأتي:
جدول (1): دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المدروسة

Distributions	*PDF*	*Expectation*
Normal	$f(\varepsilon;\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}$	$E(\varepsilon) = 0$
Exponential	$f(\varepsilon;\ \lambda) = \lambda e^{-\lambda\varepsilon}$	$E(\varepsilon) = 1/\lambda$
Two-Par. Exponential	$f(\varepsilon;\ \lambda,\eta) = \lambda e^{-\lambda(\varepsilon-\eta)}$	$E(\varepsilon) = \frac{\lambda\eta+1}{\lambda}$
Lindley	$f(\varepsilon;\ \lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda+1}(1+\varepsilon)e^{-\lambda\varepsilon}$	$E(\varepsilon) = \frac{(\lambda+2)}{\lambda(\lambda+1)}$
Two-Par. Lindley	$f(\varepsilon;\alpha,\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda+\alpha}(1 + \alpha\varepsilon)e^{-\lambda\varepsilon}$	$E(\varepsilon) = \frac{(\lambda+2\alpha)}{\lambda(\lambda+\alpha)}$

4- مقدرات طريقة الإمكان الأعظم

تستخدم طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method في تقدير معلمات النماذج الإحصائية بحيث تجعل هذه المقدرات دالة الإمكان Likelihood Function في نهايتها العظمى (Mavrakakis & Penzer, 2021). وفيما يأتي دالة الإمكان ولوغاريتمها الطبيعي للتوزيعات المدروسة:

أولاً: التوزيع الطبيعي

يمكن تعريف دالة الإمكان بالنسبة للتوزيع الطبيعي كما يأتي (العزاوي، 2001):

$$L(\phi,\theta,\sigma^2|\boldsymbol{\varepsilon}) = [2\pi\sigma^2]^{-\frac{n}{2}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right) \qquad (6)$$

أما اللوغاريتم الطبيعي هذه الدالة فيعرف كما يأتي:

$$\ell(\phi,\theta,\sigma^2|\boldsymbol{\varepsilon}) = -\frac{n}{2}ln[2\pi\sigma^2] - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2 \qquad (7)$$

ثانياً: التوزيع الأسي

وتعرف دالة الإمكان للتوزيع الأسي على النحو الآتي (العزاوي، 2001):

$$L(\phi,\theta,\lambda|\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda^n exp\left(-\lambda\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\right) \qquad (8)$$

وبالنسبة للوغاريتم الطبيعي لهذه الدالة فيعرف كما يأتي:

$$\ell(\phi,\theta,\lambda|\boldsymbol{\varepsilon}) = nln[\lambda] - \lambda\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t \qquad (9)$$

ثالثاً: التوزيع الأسي ذي المعلمتين

كما تعرف دالة الإمكان للتوزيع الأسي ذي المعلمتين بالشكل الآتي (حسوني وغني، 2021):

$$L(\phi,\theta,\lambda,\eta|\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda^n exp\left(-\lambda\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t + \lambda\eta\right) \qquad (10)$$

واللوغاريتم الطبيعي لهذه الدالة يعرف كما يأتي:

$$\ell(\phi,\theta,\lambda,\eta|\boldsymbol{\varepsilon}) = nln[\lambda] - \lambda\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t + \lambda\eta \qquad (11)$$

رابعاً: توزيع لندلي

يمكن تعريف دالة الإمكان لتوزيع لندلي كما يأتي (حسوني وغني، 2022):

$$L(\phi,\theta,\lambda|\boldsymbol{\varepsilon}) = \left[\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\right]^n \prod_{t=1}^{n}(1+\varepsilon_t)\, exp\left(-\lambda\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\right) \qquad (12)$$

واللوغاريتم الطبيعي لها يعرف كما يأتي:

$$\ell(\phi,\theta,\lambda|\boldsymbol{\varepsilon}) = 2nln(\lambda) - nln(\lambda+1) + \sum_{t=1}^{n} ln(1+\varepsilon_t) - \lambda\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t \quad (13)$$

خامساً: توزيع لندلي ذي المعلمتين

بالنسبة توزيع لندلي ذي المعلمتين فيمكن تعريف دالة الإمكان كما يأتي (هذا البحث):

$$L(\phi,\theta,\lambda,\alpha|\boldsymbol{\varepsilon}) = \left[\frac{\lambda^2}{\lambda+\alpha}\right]^n \prod_{t=1}^{n}(1+\alpha\varepsilon_t)\, exp\left(-\lambda\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\right) \quad (14)$$

واللوغاريتم الطبيعي لها فيعرف كما يأتي:

$$\ell(\phi,\theta,\lambda,\alpha|\boldsymbol{\varepsilon}) = 2nln(\lambda) - nln(\lambda+\alpha) + \sum_{t=1}^{n} ln(1+\alpha\varepsilon_t) - \lambda\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t \quad (15)$$

حيث إن ε_t معرفة في المعادلة (3).

ونتيجة للتطور الكبير في مجال الحوسبة الإحصائية وظهور برمجيات تحتوي على أدوات كبيرة تمتاز بالسرعة والدقة فقد تم استخدام دالة optim ضمن حزمة stats في بيئة R (R Core Team, 2023) لتعظيم دوال الإمكان بالنسبة لجميع النماذج المدروسة بدلاً من الحسابات اليدوية.

5- الجانب التطبيقي

في هذا الجزء من البحث، تم تقدير نموذج ARMA(1,1) لمجموعتين من البيانات بالاعتماد النماذج الخمسة التي تم التطرق لها في الجانب النظري، وتتمثل هذه البيانات في بيانات سرعة الرياح من الأول من كانون الثاني عام 2020 إلى 23 شباط عام 2021، والتي عمل عليها (حسوني وغني، 2021)، وقد أثبت الباحثان أن هذه البيانات مستقرة بالاستناد إلى اختباري ديكي فولر الموسع وفيليبس بيرون. ومن خلال رسم دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي اقترحا استخدام نموذج ARMA(1,1). والمجموعة الثانية تمثل تدفق نهر Somerset Yeo في المملكة المتحدة للفترة من 10 كانون الثاني و28 شباط عام 2021، والتي عمل عليها الباحثان (حسوني وغني، 2022)، واثبتا استقرارية هذه السلسلة واقترحا نموذج ARMA(1,1) أيضاً من خلال رسم دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي. وقد تم اختيار هذه المجموعتين من البيانات لقرب موضوع البحثين إلى موضوع الدراسة. والجدول الآتي يوضح بعض الإحصاءات الوصفية للسلسلتين:

جدول (2): إحصاءات وصفية لسلسلتي الدراسة

السلسلة	العدد	أقل قيمة	الوسيط	أعلى قيمة	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	معامل الالتواء	معامل التفلطح
سرعة الرياح	85	7.4	14.8	51.2	17.441	8.75	1.715	6.171
تدفق النهر	50	1.52	5.185	37.9	6.47	6.175	3.153	15.308

حيث يلاحظ أن كلا السلسلتين يعاني من التواء موجب عالي، ويعاني من تدبب أيضاً. وفيما يأتي تقدير النماذج لمجموعتي البيانات، مع ملاحظة أن جميع العمليات جرت في بيئة R:

5-1- بيانات سرعة الرياح

تم تقدير معلمات نموذج ARMA(1,1) لبيانات سرعة الرياح في العراق، وكانت نتائج تقدير المعلمات بالنسبة للنماذج الخمسة كما يأتي:

جدول (3): تقديرات المعلمات لبيانات سرعة الرياح

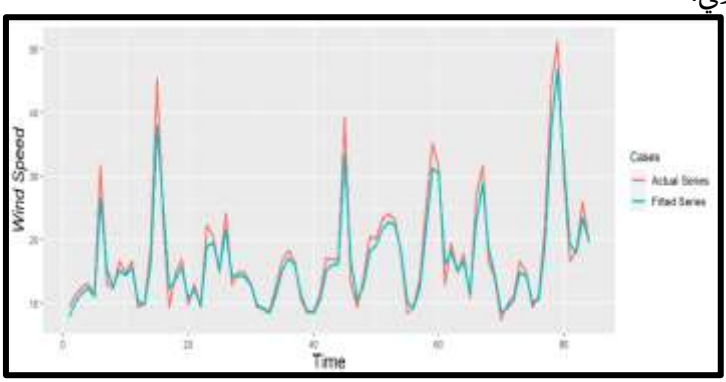
Model	$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\eta}$
Normal	0.93479	0.21052	78.79803	-	-	-
Exponential	0.96180	0.16566	-	-	0.16103	-
Two-Par. Exponential	0.96180	0.16567	-	-	0.16135	0.90754
Lindley	0.91932	0.33776	-	-	0.28033	-
Two-Par. Lindley	0.96688	0.20256	-	0.02108	0.17811	-

وبناءً على هذه المعلمات تم حساب قيم بعض المعايير ليتسنى لنا المقارنة بين النماذج الخمسة المدروسة، وهذه المعايير هي جذر متوسط مربعات الخطأ (RMSE) ومعيار أكايكي للمعلومات (AIC)، ومعيار بيز للمعلومات (BIC)، والجدول (4) يبن قيم هذه المعايير، حيث إن النموذج المقترح هو أفضل نموذج لأنه يمتلك أقل المعايير، وبشكل عام فأن جميع النماذج غير الطبيعية هي أفضل من النموذج الطبيعي، والسبب واضح وهو أن البيانات تعاني من التواء وتفلطح.

جدول (4): معايير المقارنة لبيانات سرعة الرياح

Model	$RMSE$	AIC	BIC
Normal	9.489228	618.3984	625.7264
Exponential	8.993684	491.1108	500.8814
Two-Par. Exponential	8.951509	490.8426	500.6132
Lindley	8.942945	488.8946	496.2226
Two-Par. Lindley	8.942731	488.7846	496.1126

وقد تم رسم السلسلة مع السلسلة التقديرية باستخدام نموذج لندلي ذي المعلمتين، وكما في الشكل الآتي:



شكل (3): رسم سلسلة سرعة الرياح

نلاحظ من الشكل اقتراب السلسلة المقدرة من الحقيقية.

2-5- بيانات تدفق النهر

تم تقدير معلمات نموذج ARMA(1,1) لبيانات تدفق نهر Somerset Yeo في المملكة المتحدة، وهكذا كانت نتائج تقييم المعلمات للنماذج الخمسة كما يلي:

جدول (5): تقديرات المعلمات لبيانات تدفق النهر

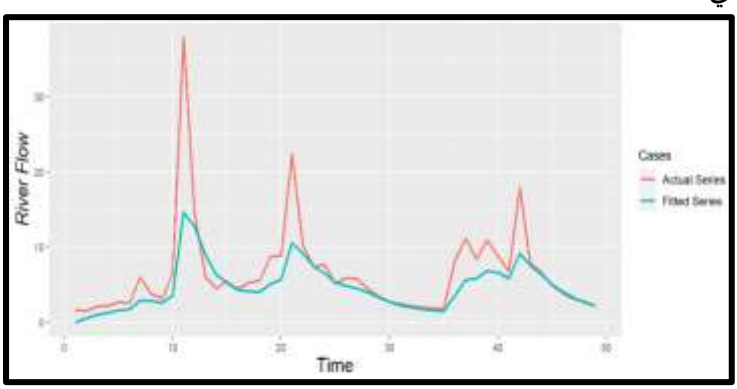
Model	$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\eta}$
Normal	0.91056	0.46918	37.08243	-	-	-
Exponential	0.83307	0.49157	-	-	0.36434	-
Two-Par. Exponential	0.83310	0.49159	-	-	0.36381	0.60408
Lindley	0.89404	0.52482	-	-	0.56616	-
Two-Par. Lindley	0.87536	0.54228	-	0.10883	0.46958	-

بالاستناد إلى هذه المعطيات، تم حساب قيم بعض المعايير ليسهل علينا المقارنة بين النماذج الخمسة المدروسة. الجدول (6) يظهر قيم هذه المعايير. والواضح أن النموذج المقترح هو أفضل من بقية النماذج لأنه يمتلك أقل المعايير، والسبب هو أن البيانات تعاني من التواء وتفلطح.

جدول (6): معايير المقارنة لبيانات تدفق النهر

Model	**RMSE**	AIC	BIC
Normal	6.318732	328.5562	334.2923
Exponential	6.25384	232.7631	238.4992
Two-Par. Exponential	6.244801	217.8597	225.5078
Lindley	6.140641	213.2416	220.8897
Two-Par. Lindley	6.095835	210.8171	216.5532

وقد تم رسم السلسلة مع السلسلة التقديرية باستخدام نموذج لندلي ذي المعلمتين، وكما في الشكل الآتي:



شكل (4): رسم سلسلة تدفق النهر

نلاحظ من الشكل اقتراب السلسلة المقدرة من الحقيقية.

6- الاستنتاجات

بناءً على ما سبق نستنتج أن مجموعتي البيانات هي بيانات تعاني من تفلطح والتواء، مما يدل على بعدها عن النمط الطبيعي، وبالتالي لا يكون نموذج التوزيع الطبيعي ملائماً. كما أثبتت نتائج النموذج المقترح أفضلية نموذج لندلي ذي المعلمتين بالاعتماد على مجموعتي بيانات الدراسة، وظهرت جميع نتائج التوزيعات غير الطبيعية أفضلية على النموذج الطبيعي.

المصادر

1. حسوني، رواء مالك، وغني، علي ياسين، (2021)، تقدير معلمات أنموذج ARMA عندما يتبع الخطأ العشوائي التوزيع الاسي ذو المعلمتين، مجلة الإدارة والاقتصاد، العدد ١٣٠، ص ١٩٠-٢١٢.
2. حسوني، رواء مالك، وغني، علي ياسين، (2022)، تقدير معلمات أنموذج ARMA عندما يتبع الخطأ العشوائي توزيع لندلي، مجلة الإدارة والاقتصاد، العدد 132، ص 260-278.
3. العزاوي، ماجد رشيد، (٢٠٠١)، حول بعض خصائص الانموذج المختلط ARMA(1,1) غير الطبيعي، أطروحة دكتوراه، جامعة بغداد.
4. Bakouch, H. S., & Popović, B. V. (2016). Lindley first-order autoregressive model with applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, *45*(17), 4988-5006.
5. Balakrishna, N. (2021). *Non-Gaussian autoregressive-type time Series*. Singapore: Springer.
6. Damsleth, E., & El-Shaarawi, A. H. (1989). ARMA models with double-exponentially distributed noise. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, *51*(1), 61-69.
7. de Araújo, F. J. M., Guerra, R. R., & Peña-Ramírez, F. A. (2023). The Burr XII Autoregressive Moving Average Model. In *Computer Sciences & Mathematics Forum* (Vol. 7, No. 1, p. 46). MDPI.
8. Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). Lindley distribution and its application. *Mathematics and computers in simulation*, *78*(4), 493-506.
9. Kasraie, M., & Sayyareh, A. (2020). Modified Maximum Likelihood Estimation in First-Order Autoregressive Moving Average Models with some Non-Normal Residuals. *Journal of The Iranian Statistical Society*, *19*(2), 33-66.
10. Lawrance, A. J., & Lewis, P. A. W. (1980). The exponential autoregressive-moving average EARMA (p, q) process. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, *42*(2), 150-161.
11. Mavrakakis, M. C., & Penzer, J. (2021). *Probability and statistical inference: from basic principles to advanced models*. CRC Press.
12. Privalsky, V. (2023). *Practical Time Series Analysis in Natural Sciences*. Springer Nature.
13. R Core Team (2023). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. https://www.R-project.org
14. Rachev, S. T., Menn, C., & Fabozzi, F. J. (2005). *Fat-tailed and skewed asset return distributions: implications for risk management, portfolio selection, and option pricing*. John Wiley & Sons.

15. Rigby, R. A., Stasinopoulos, M. D., Heller, G. Z., & De Bastiani, F. (2019). *Distributions for modeling location, scale, and shape: Using GAMLSS in R*. CRC press.
16. Sim, C. H. (1987). A mixed gamma ARMA (1, 1) model for river flow time series. *Water Resources Research*, *23*(1), 32-36.
17. Shanker, R., Sharma, S., & Shanker, R. (2013). A two-parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data.
18. Woodward, W. A., Sadler, B. P., & Robertson, S. (2022). *Time series for data science: Analysis and forecasting*. CRC Press