المعاينة العنقودية

1. المبدأ

- مجتمع الدراسة مقسم إلى M جزء أو مجموعة يسمى كل جزء أو مجموعة عنقود.

$$(i=1,2,\ldots\ldots M)$$

- العنقود i يضم N_i وحدة ثانوية.
- نسحب عينة من العناقيد بحجم m، $(i=1,2,\ldots..m)$.
- نقوم باستجواب جميع الوحدات الثانوية المكونة لكل عنقود مسحوب.
- لدينا مستويين للمشاهدة:

  - المستوى الأول: العنقود i :

$$i=1,2,\ldots\ldots M$$

  - المستوى الثاني: الفرد j في العنقود i:

$$j=1,2,\ldots\ldots N_i$$

- Y_{ij} : قيمة المتغير y للفرد j في العنقود i .

2. مصطلحات

على مستوى العنقود i:

N_i	حجم العنقود: عدد المفردات المكونة للعنفود
$\overline{Y}_{i}= \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} y_{i\,j}$	متوسط العنقود
$T_{i}= \sum_{j=1}^{N_i} y_{ij} = N_i\ \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} y_{ij}$ $T_{i} = N_{i\,.}\ \overline{Y}_i$	المجموع في العنقود
$\sigma^2_{i}= \frac{1}{N_i}\sum_{j}^{N_i}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_i\right)^2$	التباين في العنقود
$S_i^2 = \frac{1}{N_{i-1}}\sum_{j}^{N_i}\sum_{j}^{N_i}\left(Y_{i\,j} - \overline{Y}_i\right)^2$ $S_i^2 = \frac{N}{N-1}\ \sigma_i^2$	التباين المصحح في العنقود

على مستوى المجتمع

حجم المجتمع (عدد المفردات)	$N = \sum_{i=1}^{M} N_i$
المتوسط	$\bar{Y} = \frac{T}{N} = \sum_{(i=1)}^{n} \frac{N_i}{N} \bar{Y}_i$
المجموع	$T = \sum_{i=1}^{M} T_i$ $T = \sum_{i=1}^{M} N_i \bar{Y}_i$ $T = \sum_{i}^{M} \sum_{j}^{N_i} y_{i\,j}$
التباين	$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i}^{M} \sum_{j}^{N_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2$
التباين المصحح	$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i}^{M} \sum_{j}^{N_i} (Y_{i\,j} - \bar{Y})^2 = \frac{N}{N-1} \sigma^2$

3. تقدير المعلمات

1.3 الحالة الأولى: عناقيد ذات أحجام متساوية

نقوم بسحب عينة من m عنقود من مجتمع متكون من M عنقود وذلك بطريقة المعاينة العشوائية البسيطة. إذا العينة تتكون من مقادير (متوسط ومجموع) محسوبة على مستوى العناقيد.

N_o هو الحجم الثابت للعناقيد.

إذن: $N_i = N_o = \bar{\ }$ كيفما كانت i.

أي:

$$N = MN_o$$

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{M} \frac{N_o}{N} \bar{Y}_i$$

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{M} \frac{N_o}{MN_o} \bar{Y}_i$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \bar{Y}_i$$

إذا كان سحب العناقيد قد تم باحتمال متساوي وبطريقة السحب بدون إرجاع، فإن المقدر الغير متحيز للمتوسط $\bar{Y}$ في هذه الحالة، هو $\bar{y}$. بحيث:

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \bar{Y}_i$$

تباين مقدر المتوسط هو:

$$V(\bar{y}) = \frac{M-m}{M}\frac{S_1^2}{m}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$$

تقدير تباين مقدر المتوسط هو:

$$\hat{V}\ (\bar{y}) = \frac{M-m}{M}\ \frac{s_1^2}{m}$$

$$s_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\bar{Y}_i - \bar{y})^2$$

يمكن تسجيل الملاحظة التالية: كلما رفعنا من حجم العينة من حيث عدد العناقيد وقل مستوى تشتت الظاهرة المدروسة بين العناقيد، كلما ارتفعت دقة مقدرات العينة العنقودية.

2.3 الحالة الثانية: أحجام العناقيد غير متساوية

تقدير المتوسط

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{M}\frac{N_i}{N}\ \bar{Y}_i$$

بما أن:

$$\bar{N} = \frac{N}{M}$$

يمكن كتابة:

$$\bar{Y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \frac{N_i}{\bar{\bar{N}}} \bar{Y}_i$$

وبالتالي فالمقدر الغير متحيز للمتوسط $\bar{Y}$ هو:

$$\hat{\bar{\bar{Y}}} = \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{\bar{\bar{N}}} \bar{Y}_i$$

التباين:

$$V(\bar{y}) = \frac{M-m}{M} \cdot \frac{S_1^2}{m}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{N_i}{\bar{\bar{N}}} \bar{Y}_i - \bar{Y} \right)^2$$

تقدير التباين:

$$\hat{V}\left(\hat{\bar{\bar{Y}}}\right) = \frac{M-m}{M} \cdot \frac{s_1^2}{m}$$

$$s_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{N_i}{\bar{\bar{N}}} \bar{Y}_i - \bar{y} \right)^2$$

3.3 الحالة الثالثة: سحب العناقيد باحتمالات غير متساوية

نقوم بسحب عينة من m عنقود من مجتمع متكون من M عنقود باحتمالات غير متساوية وبطريقة السحب مع الإعادة.

المجموع

المقدر الغير متحيز للمجموع:

$$\hat{T} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{T_i}{P_i}$$

علما أن P_i هو احتمال سحب العنقود i.

تباين المجموع:

$$V(\hat{T}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{M}P_i\left(\frac{T_i}{P_i} - T\right)^2$$

تقدير تباين المجموع:

$$V(\hat{T}) = \frac{1}{m(m-1)}\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{T_i}{P_i} - \hat{T}\right)^2$$

المتوسط

المقدر الغير متحيز للمتوسط هو:

$$\hat{\hat{Y}} = \frac{1}{mN}\sum_{i=1}^{m}\frac{T_i}{P_i}$$

تباين المتوسط:

$$V\left(\hat{\hat{Y}}\right) = \frac{1}{N^2 m}\sum_{i=1}^{M} P_i\left(\frac{T_i}{P_i} - T\right)^2$$

تقدير تباين المتوسط:

$$\hat{V}\left(\hat{\hat{Y}}\right) = \frac{1}{N^2 m(m-1)}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{T_i}{P_i} - \hat{T}\right)^2$$