مدخل الى بحوث العمليات والبرمجة الخطية

An introduction to operations research and linear programming

الاستاذ الدكتور

خالد زهدي مصطفى خواجه

المديـر العـام الاسبق

للمعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية

المملكة الاردنية الهاشمية
رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/8/3996)

519.72
خواجة، خالد زهدي مصطفى
مدخل إلى بحوث العمليات والبرمجة الخطية / خالد زهدي مصطفى
خواجة. - عمان:المؤلف, 2022

( ) ص.
ر.ا. : 2022/8/3996.
المواصفات :/البرمجة الخطية//التحليل الرياضي//الاحصاء
الرياضي//بحوث العمليات/

المحتويات

مقدمة الكتاب

حاولت في هذا الكتاب ان ابسّط بعض مسائل بحوث العمليات والبرمجة الخطية، دون الخوض في الجوانب المعقدة من هذا الموضوع، ليكون مدخلا او مقدمة للمسائل الاكثر صعوبة وتفصيلا، وليزود طلاب الجامعات في المراحل الاولية والعليا بالمعلومات الكافية التي تؤهلهم لاستخدام بحوث العمليات والبرمجة الخطية في الوصول الى الحل الامثل للمسائل الواقعية.

ظهرت التطبيقات العملية لاساليب بحوث العمليات لاول مرة ابان الحرب العالمية الثانية، وانطلقت من المؤسسة العسكرية، ثم انتقلت الى الميادين الاقتصادية والصناعية والمدنية.

تعد بحوث العمليات احدى اهم الوسائل الرياضية المستخدمة في الدراسات الاقتصادية والاحصائية والادارية والعسكرية، وهي مجموعة من الطرق والاساليب الكمية التحليلية التي تسعى الى صياغة نماذج رياضية للمشكلات العملية التي تحتوي على العديد من المتغيرات، وكذلك على العديد من الشروط أو القيود التي هي على شكل متباينات اكثر منها على شكل متساويات، والتي تشترط ان تكون جميع المتغيرات الاساسية متغيرات غير سالبة، وتساعد في حل هذه المشكلات.

ومن اكثر الطرق التي تلعب دوراً هاماً في حل مثل هذه المشاكل طريقة البرمجة الخطية التي حققت نجاحا كبيرا في تطوير اساليب معينة لحل المسائل التي لها دالة هدف خطية ومجموعة من القيود الخطية (القيود الهيكلية) والقيود غير سالبة.

جاء هذا الكتاب في جزأين: تناول الجزء الاول بعض مسائل بحوث العمليات (القرار الاداري وعمليات ماركوف ونظرية المباريات)، بينما تناول الجزء الثاني بعض مواضيع البرمجة الخطية (نماذج البرمجة

الخطية و الحل البياني لمسائل البرمجة الخطية و وتصنيف وخواص حلول البرمجة الخطية و طريقة السمبلكس والمشكلة البديلة ومشكلة النقل)، كذلك فقد تضمن الكتاب العديد من الامثلة التوضيحية، بالاضافة الى تعزيز كل فصل بتمارين متنوعة وحلول هذه التمارين.

ارجو ان اكون قد قدمت خدمة متواضعة للباحثين ولطلبة الجامعات ، وارجو الله عز وجل ان تكون صالحة ومفيدة لجميع طلبة العلم والمستفيدين منه.

الدكتور خالد زهدي خواجه

الجزء الاول: بحوث العمليات

الفصل الاول

القرارات الادارية

Administrative Decisions

1.1 مقدمة في التحليل الكمي (Quantitative analysis)

تعريف القرار: هو اختيار حل معين من بين مجموعة من البدائل.

يحاول المدير ان يختار ذلك البديل الذي يحقق اقصـــــى فاعلية، ويواجه المدير العديد من المواقف التي تتطلب اتخاذ قرارات معينة. سنقسم القرارات الى المجموعات التالية:

1. القرارات في ظل ظروف التاكد (جميع الحقائق معروفة بدقة كاملة) (CERTAINTY)
2. القرارات في ظل ظروف عدم التاكد (UNCERTAINTY) حيث ان الحدث المنتظر غير مؤكد، وان كان يمكن تخصيص نسب احتمالات مختلفة لكل حدث ممكن
3. القرارات التي تتخذ في فترة زمنية واحدة فقط
4. القرارات التي تتخذ في صورة تتابع زمني معين
5. القرارات التي يكون الطرف الاخر فيها هو الطبيعة (التنقيب عن البترول)
6. القرارات التي يكون الطرف الاخر فيها مفكر (الاعلانات)

خطوات القرار

تمثل الخطوات التالية الخطوات العامة التي يمكن ان نسترشد بها في اتخاذ اي نوع من انواع القرارات:

1. حدد المعيار (Criterion) الذي سيستخدم (اقصى ربح ممكن او اقل تكلفة ممكنه...)
2. حدد البدائل المتاحة (Available Alternative)
3. حدد النموذج الممكن اســتخدامه وقيم معلماته (Parameters)، مثلا قد نقرر بان التكلفة C تساوي

$$C = A + B \text{ (عدد الوحدات المباعة)}$$

$$C = A + BX$$

فهنا لابد من تحديد قيم B , A حتى يمكن استخدام النموذج

4. حدد ذلك البديل الذي يتمشى مع المعيار الذي تم استخدامه في الخطوة الاولى

مثال:

يمكننا ان نبيع 1000 وحدة من ســلعة معينة الى الحكومة بســعر 50 دينار للوحدة، هل نقبل هذا الامر مع معرفة ان الشركة لديها طاقة عاطلة؟

1. المعيار هو تعظيم الربح
2. البدائل المتاحة هي:
   i. قبول الامر
   ii. رفض الامر
3. نحتاج الى معرفة التكلفة الاضافية لانتاج 1000 وحدة ونموذج التكلفة هو:

$$C = A + 1000\,B$$

واذا افترضنا ضرورة شراء معدات معينة تكلفتها 5000 دينار، اي ($A=5000$)، وان التكلفة المتغيرة لانتاج وحدة واحدة هي 30 دينار، اي ($B = 30$)، تكون التكلفة الكلية لتنفيذ هذا الامر

$$= 5000 + (1000)\ 30$$
$$= 35000$$

4. نقارن التكلفة بســعر البيع (50000) نجد ان الربح = 15000 لو قبلنا العرض، بينما الربح صفر لو رفضناه اذن نقبل الامر.

لقد استخدمنا في المثال البسيط معلومات اساسية واساليب حسابية بسيطة، ولكن حين التعامل مع مشاكل اكثر تعقيدا فان الامر يتطلب استخدام اساليب تحليلية وكمية كنظرية الاحتمالات والرياضيات والاحصاء والبرمجة الخطية وغير الخطية والديناميكية.

2.1 بناء النموذج الكمي (Quantitative model)

التجريد (Abstration)

ان المشــاكل الادارية الواقعية تميل الى التعقيد الشـديد، فهناك عدد لاحصــر له من الحقائق في اي حالة واقعية، وبالاضافة الى ذلك، كل فعل محتمل (او قرار محتمل) يبدأ بسلسلة من السبب والاثر والتفاعل " التي ليس لها اي نهاية منطقية"

فالعقل البشري لايستطيع (باي حال من الاحوال) ان ياخذ في الاعتبار جميع جوانب المشكلة حتى يمكن اتخاذ قرار.

فيقوم متخذ القرار بتخفيض الوضع الى تلك العوامل التي يعتبرها اكثر ارتباطا بالمشكلة التي يواجهها.

فالتجريد يعتبر الخطوة الاولى والضــرورية في حل اي مشــكلة ادارية، اي لابد من تجاهل بعض نواحي المشـكلة حتى يمكن اتخاذ القرار. ولكن قد يقع خطا في التجريد، فيتم تجريد عوامل اســاسـية او اسـتخدام

عوامل غير كافية في بناء النموذج، ولهذا يجب اختيار العوامل (المتغيرات) بدقة وفق دراية تامة ودراسة معمقة.

بناء النموذج

يقوم متخذ القرار بعد اختيار العوامل الاساسية او المتغيرات في الحالة الفعلية بادماجها مع بعضها البعض بصورة منطقية، بحيث تكون في النهاية نموذجا لهذه المشكلة، والنموذج هو تمثيل مبسط للموقع العملي،

ويمكن تلخيص مزايا النموذج البسيط فيما يلي:-

1. يوفر في الوقت والمجهود العقلي
2. يمكن فهمه بسهولة بواسطة متخذ القرار
3. في حالة الضرورة يمكن تعديل النموذج بسرعة وكفاية

لا يهدف متخذ القرار الى بناء نموذج يشابه الحالة الواقعية في كل شيء، فمثل هذا النموذج سيتطلب وقتا لانهائي في بنائه وربما يصعب على العقل الآدمي فهمه بعد ذلك.

حل المشكلة

يتم حل المشكلة او اتخاذ القرار باستخدام التحليل المنطقي لهذا النموذج

3.1 القرارات الادارية وفكرة الاحتمالات

Administrative decisions and the idea of probability

تتخذ القرارات الادارية اما في ظروف تقترب من التاكد او في ظل ظروف عدم التاكد، والنوع الثاني من القرارات هو الاكثر شيوعاً في الحياة العملية، والتحليل الكمي المطلوب في النوع الاول من القرارات عادة يتخذ شكل تعظيم (Maximizing) هدف معين (ارباح او انتاج)، وتحقيق هذا الهدف يكون غالباً خاضعاً لعدة قيود.

في مثالنا الســـــابق قارنا بين بديلين: الاول قبول الامر والثاني رفض الامر لعقد حكومي مقداره 1000 وحدة، ويعتبر هذا قرار في ظل ظروف تاكد كاملة واتضــح لنا ان الارباح ســتزداد بمقدار 15000 دينار في حالة قبول الامر، ولهذا السبب فقد اخترنا هذا البديل.

ولنفترض اننا سنغير هذا الوضع قليلاً كالاتي:

هناك عدم تاكد بالنســبة للمســتوى الحقيقي للمبيعات، فهي قد تكون 100 وحدة او 250 وحدة او 1000 وحدة والبدائل المتوفرة لنا مرة اخرى هي:

1. ان نقوم بتسويق المنتج، ونقبل اي ربح او خسارة تتحقق نتيجة لذلك
2. ان نرفض المشروع باكمله، ونحقق ربحاً مقداره صفر

ولنفترض ان التكلفة الثابتة (5000 دينار) تتحقق قبل ان نعرف كمية الطلب الحقيقية، ولكن يمكن تصنيع الوحدات بعد معرفة الطلب (بمعنى انه ليس هناك مشكلة مخزون سلعي).

ولنقم بحساب كمية الربح المحقق لكل مستوى من المبيعات، اذا قمنا بتسويق المنتج:

الناتج (الربح او الخسارة)	**الحالة السائدة (المبيعات)**
−3000	100
0	250
15000	1000

والواقع ان احســن بديل يتوقف على احتمال حدوث كل مســتوى من مســتوى المبيعات، فلو كنا متاكدين تماما ان مستوى المبيعات سيكون 1000 وحدة فاننا سنقوم بتسويق السلعة بدون اي تردد، اما اذا كانت المبيعات ستكون 100 وحدة بالتاكيد فاننا سنرفض المشروع بدون اي تردد ايضاً، ونتجنب خسارة قدرها 3000 دينار، وفي حالة مستوى مبيعات 250 وحدة، فان اختيار اي بديل سيكون سواء لدينا.

وعندما تكون الحالة الســــائدة غير معروفة، فان متخذ القرار يعمل في ظل معلومات غير كاملة، وهناك عدة وســائل لمعالجة هذه المشــكلة، وتعتبر **قاعدة بيز** من اشــهرها، وطبقاً لهذه القاعدة يقوم متخذ القرار بالعمليات الحسابية الاتية لكل قرار محتمل:

1. اعداد قائمة بالحالات السائدة (المتوقعة)
2. تخصيص وزن احتمالي لكل حالة
3. حساب الناتج المتوقع للحالات السائدة لفعل محدد
4. نحسب التوقع لكل ناتج (نقوم بضرب احتمالات حدوث كل حالة سائدة بناتج هذا الفعل والحالة الســـائدة) ثم نقوم بجمع حواصـــل الضـــرب هذه (اي نجمع التوقعات، والنتيجة النهائية يطلق عليها " **القيمة المتوقعة للفعل**".

نقوم بهذه العمليات الحسـابية لكل فعل محتمل، والقرار الذي يتضـمن اعلى قيمة متوقعة هو حل بيز وهو الواجب اختياره.

وبتطبيق قاعدة بيز على مثالنا السابق، اذا كان متخذ القرار يشعر بان احتمال بيع 100 وحدة هو 40% وان احتمال بيع 250 وحدة هو 40% ايضاً وان احتمال بيع 1000 وحدة هو 20% نتبع ما يلي:

نمثل البيانات في الجدول التالي:

التوقع للربح (الاحتمال × الربح)	**الربح**	**الاحتمالات**	**المبيعات**
−1200	−3000	0.40	100
0	0	0.40	250
3000	15000	0.20	1000
1800			

الربح المتوقع (او القيمة النقدية المتوقعة) لتسويق هذا المنتج هو مجموع حاصل ضرب الاحتمال في الربح ويساوي 1800 دينار، بينما يساوي صفر في حالة رفض المشروع، وبالتالي وباستخدام قاعدة بيز فاننا نقوم باتخاذ قرار بتسويق هذا المنتج.

هذا ولابد من الذكر بان الحكم الشخصي يدخل في عملية اتخاذ القرارات في الحالات التالية:

- عند اختيار الوزن الاحتمالي لكل حالة سائدة
- عند اختيار الهدف او المعيار

4.1 نظرية القرار Decision theory

تهتم نظرية القرار بصفة رئيسية بكيفية مساعدة الافراد (او المنظمات) في صنع واتخاذ القرارات وبتحسين عملية اتخاذ القرارات في ظل ظروف عدم التاكد، وتمكن نظرية القرار متخذ القرار من تحليل مجموعة من الاوضاع المعقدة والتي تتضمن العديد من البدائل والعديد من النواتج.

وسنعالج في هذا الجزء من اتخاذ القرارات في ظل ظروف عدم التاكد. وسندرس قرارا شائعا الى حد كبير، حيث سيكون هناك عدة افعال محتملة وعدة حالات سائدة.

مثلا الافعال المحتمله

- تحديد عدد الوحدات الواجب شراؤها من منتج ما
- شراء او عدم شراء بوليصة تامين ضد الحريق
- تغيير او عدم تغيير سعر منتج معين

وتكون **الحالات السائدة** (الاحداث المحتملة الوقوع) **(Prevalent Cases)**

- الطلب على المنتج قد يكون 0,1,2,.....,50
- قد يشتعل الحريق او لايشتعل

• اذا قمنا بتغيير السعر فان عدد الوحدات المباعة ستكون 1,0.....,10

ونتيجة لعدم معرفة اي الحالات الســـائدة هي الحالة الحقيقية، فاننا نخصـــص توزيعا احتماليا للحدوث المحتمل لكل حادث، ويمكن ان يســـتند هذا التوزيع الاحتمالي على الماضـــي اذا اقتنع متخذ القرار بان التاريخ سيعيد نفسه، وعلى كل فالحكم الشخصي يتدخل الى حد كبير في تحديد الاحتمالات.

مثال:

اذا كانت تكلفة الوحدة من منتج ما 3 دنانير، وسـعر بيعها 5 دنانير، والوحدات غير المباعة ليسـت لها قيمة كخردة، ويظهر الجدول التالي الحالات الســـائدة المتوقعة (حجم الطلب المتوقع) وكذلك الاحتمال الخاص بكل حالة.

الطلب	الاحتمال
0	0.05
1	0.40
2	0.55

فما هو عدد الوحدات الواجب اصدار امر بشرائها؟

الحل:

الخطوة الاولى في الحل هي اعداد جدول الارباح المشروطة

البدائـــل

الأربـــاح

الحالة السائدة (الطلب)	الاحتمال	شراء 0	شراء 1	شراء 2
0	0.50	0	−3	−6
1	0.40	0	2	−1
2	0.55	0	2	4
	اقصى ربح	0	2	4
	اقصى خسارة	0	−3	−6

وبالطبع مادام احتمال بيع 3 وحدات = صـــفر فلا يمكن شـــراء 3 قطع او اكثر، وان اتخاذ قرار بعدد الوحدات الواجب شراؤها معقد رغم بساطة المشكلة.

5.1 معيار القرار Decision Criterion

هناك عدة معايير يمكن لمتخذ القرار ان يختار احداها:

1. معيار Maximax تعظيم اقصى ربح ممكن

ويتم ذلك بان نحدد اقصى ربح يمكن ان نحصل عليه عند كل بديل:

اقصى ربح في حالة شراء صفر يساوي صفر، واقصى ربح في حالة شراء 1 هو 2، واقصى ربح في حالة شراء 2 هو 4

اذن نختار الحالة الاخيرة او البديل الاخير اي شراء وحدتين.

ولكن هذا المعيار يهمل الخسائر المحتملة، واحتمالات تحقيق الربح او عدم تحقيقه، ويروق هذا المعيار لشخص مغامر جداً، ولكن غالباً ما ينتهي الامر الى خسائر كبيرة، حيث انه سيحاول دائماً القيام بمشروعات احتمالات نجاحها بسيط جداً، والواقع انه من المرغوب فيه منطقياً ان ندخل في اي قرار احتمالات النجاح والفشل معا دون الاقتصار على احداهما دون الاخر، وفي مثالنا هذا فان الامر سيصدر بشراء وحدتين، ولكن لو افترضنا ان احتمال بيع وحدتين هو 0.0001 فهل يكون قرار شراء وحدتين معقولا؟

2. معيار Minimax الحد الادنى للحدود القصوى

في هذا المعيار نختار ادنى قيمة لاقصى خسارة، فان الخسارة القصوى في مثالنا هي 0، 3−، 6− على التوالي، وبهذا نختار البديل الاول اي عدم شراء اي وحدة كي نحقق اقل خسارة ممكنة. والنقد الذي يوجه الى هذا المعيار هو انه يؤدي غالبا الى قرار " بان لا نفعل شيئاً " الا اذا كان احتمال الخسارة يساوي صفر، ولهذا يتسم هذا المعيار بالتحفظ الشديد، وبالطبع فان متخذ القرار وفق هذا المعيار ينتهي به الامر في النهاية الى ما يقرب من " الموت من الجوع".

3. معيار الفرص المتساوية للحدوث Equal Probability Criterion

يفترض هذا المعيار تساوي احتمالات كل البدائل، وبالتالي يختار البديل الذي يعطي اكبر ربح في المتوسط، اي يجمع ارباح كل بديل ويقسمه على عدد الحالات ويختار اكبر ربح.

والنقد الذي يوجه الى هذا المعيار هو انه يفترض تساوي احتمالات وقوع الاحداث المختلفة، ولكن في الواقع العملي من النادر ان لا تكون لدينا فكرة – ولو بسيطة – عن احتمال وقوع كل حادث.

وفي مثالنا فاننا اعطينا توزيع احتمالي، وليس هناك سبب يدعونا الى افتراض تساوي فرص وقوع الاحداث جميعاً. ويفضل دائماً استخدام افضل تقدير للاحتمالات بدلا من افتراض تساويها.

4. معيار الاحتمال الاقصى للحدوث

Criterion of Maximum Probability of Occurrence

اساس القرار هنا هو ربح الحدث الذي ترتبط به اعظم الاحتمالات للوقوع، اي اننا ناخذ في الاعتبار فقط نتائج الحالة السائدة التي يحتمل حدوثها اكثر من غيرها، ثم نختار احسن تصرف لهذه الحالة. وفي مثالنا فان هذه الحالة هي طلب وحدتين والتي تؤدي الى قرار شراء وحدتين حتى يكون الربح 4.

ولكن هذا القرار لا يمكن ان يكون صحيحاً خاصة اذا كانت الاحتمالات قريبة جداً من بعضها، وكان هناك قيمة للوحدة غير المباعة كخردة.

ثم ان هذا المعيار يتجاهل نتائج جميع الحالات ما عدا تلك الحالة ذات الاحتمالات الاعلى، ولهذا فانه يفشل في استخدام معظم المعلومات المتوافرة لمتخذ القرار مما يجعله يتخذ قرارات غير مناسبه في بعض الاحيان.

5. معيار بيز Bayes' Criterion

لقد سبق شرح طريقة بيز او قاعدة بيز، وفي مثالنا نحسب التوقع لكل بديل ونختار البديل صاحب اكبر توقع ويظهر ذلك في الجدول التالي:

شراء صفر	شراء وحدة	شراء وحدتين
0 × 0.05	- 3 × 0.05 = − 0.15	- 6 × 0.05 = - 0.30
0 × 0.40	2 × 0.40 = 0.80	-1 × 0.40 = - 0.40
0 × 0.55	2 × 0.55 = 1.10	4 × 0.55 = 2.20
0	1.75	1.50

والتصـرف او البديل الذي يؤدي الى اعلى قيمة متوقعة هو شـراء وحدة واحدة، ولهذا فالقرار يكون بشـراء وحدة واحدة. ويعتبر المعيار الاخير (معيار بيز) افضل المعايير.

الدالة الخطية Linear function

اذا كانت دالة التكلفة او الربح خطية فان ذلك يسهل من العمليات الحسابية لقاعدة بيز، فبدلاً من حساب الارباح المشروطة لكل بديل وكل حالة سائدة فانه يمكننا ان نحسب الحالة السائدة المتوسطة وادخالها في دالة الربح والتكلفة.

مثال:

اذا افترضــنا ان الربح (Y) يســاوي معامل ثابت (c) مضــروباً في عدد الوحدات المباعة x ولكننا غير متاكديين من قيمة c (بمعنى ان هناك العديد من الحالات السائدة المحتملة) ولدينا المعلومات الاتية:

القيمة	الاحتمال
150	0.20
160	0.70
170	0.10

ودالة الربح الاصلية هي $Y = cx$

فاذا افترضـنا ان عدد الوحدات التي سـتباع في الفترة التالية 10 وحدات فان الارباح المتوسـطة المتوقعة

هي $E(y) = E(cx)$

لان x هي الثابت

$$
\begin{aligned}
E(y) &= E(cx) \\
&= x\,E(c) \\
&= x\sum p.c \\
&= x\,(150 \times 0.20) + (160 \times 0.70) + (170 \times 0.10) \\
E(y) &= 159x \\
E(y) &= (159)\ 10 \\
E(y) &= 1590
\end{aligned}
$$

اي ان الربح المتوقع 1590 ديناراً

ولنفرض انه بدلاً من معرفة x بالتاكيد فاننا نعرف بان c هي 150 وان x تاخذ قيماً مختلفة بتوزيع احتمالي كما يلي:

قيمة x	**الاحتمال p**
9	0.4
10	0.5
11	0.1

تبقى دالة الهدف $Y = CX$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= E(CX) \\
&= CE(X)
\end{aligned}
$$

$$= C\sum P.X$$

$$= 150\ \{(9\times0.4) + (10\times0.5) + (11\times0.1)\}$$

$$= 150(9.7)$$

$$= 1455$$

اي ان الربح المتوقع = 1455

والان لو افترضـــنا ان كلا من x,c غير معرفتين بالتاكيد، كلاهما متغير عشـــوائي وتوزيعات احتمالاتها هي المذكورة سابقاً.

هنا سنفترض عنصر هام جدا وهو ان كلا من c و x مستقلين

$$\therefore \quad E(CX) = E(C)\ E(X)$$

ومن مثالنا

$$Y = CX$$

$$E(Y) = E(CX)$$

$$= E(C)\ E(X)$$

وباحلال توقعات كل من X, C يكون

$$E(Y) = (159)\ (9.7) = 1542$$

على هذا الاساس اذا افترضنا عدم التاكد لكل من X,C يكون لدينا ربح متوقع قدره 1542، ونسطيع ان نقوم بخططنا طبقا لذلك.

وعلى كل فلابد من التركيز على ان 1542 دينار هي عبارة عن توقعات والارباح قد تنخفض الى 1350 دينار (لو ان 150 = X = 0 , C)

او ترتفع الى 1870 (لو ان 11 = X = 11 , C)

6.1 شجرة القرارات Decision Tree

سنعالج في هذا الجزء المعيار الذي يستخدم عندما تواجه متخذ القرار مشكلة اتخاذ مجموعة متتابعة من القرارات بدلا من قرار واحد، ويطلق على هذا المعيار اسم شجرة القرارات.

هذه الشـــجرة عبارة عن تمثيل بياني يظهر تتابع القرارات الواجب اتخاذها والاحداث المحتملة المتوقع حدوثها، والمثال التالي يوضح هذه الفكرة:

مثال: يواجه مدير تسويق احدى الشركات مشكلة اتخاذ قرار بتسويق او عدم تسويق منتج جديد، وتكلفة تنمية وتسويق هذا المنتج (35000) دينار، وتعتمد الارباح التي سيتحصل عليها على قرار شركة منافسة بتسويق منتج مشابه، وعلى السعر الذي ستحدده شركتنا للمنتج الجديد.

فاذا لم يكن هناك منتج منافس فان الشركة يمكنها تحديد السعر الذي يحقق لها اقصى ربح ممكن، اما اذا كان هناك منتج منافس فان الربح سـيتوقف على السـعر الذي تحدده الشـركة لهذا المنتج والمشـروط او المقيد بالسعر الذي حدده المنافسون.

جميع هذه الحقائق واحتمالاتها تم اظهارها في شجرة القرارات في الشكل (1)،

ويلاحظ ان هذا القرار مركب، بمعنى ان الشركة لا بد ان تتخذ اولا قرارا بتسويق او عدم تسويق السلعة، ثم بعد ذلك بفترة تقوم باتخاذ قرار بتحديد سعر السلعة.

وتظهر الارباح المشروطة في نهاية الشجرة، ولاتتضمن هذه الارقام تكلفة تقديم السلعة للسوق (35000) ويظهر في الشجرة ايضاً الاحتمالات المخصصة للوحدات المختلفة، ومن الشجرة فاننا نلاحظ على سبيل المثال ان هناك منافس في السوق، فاذا قامت شركتنا بتحديد سعر مرتفع فان احتمالات ان يحدد المنافس سـعرا مرتفعا هي 0.4، واحتمال ان يحدد سـعرا متوسـطا هو 0.5، واحتمال ان يحدد سـعر منخفض هو 0.1، والارباح المشـــروطة لهذه الحالات الثلاث هي على التوالي 50000، 30000، 10000 فاذا

طرحنا تكلفة تقديم السلعة من هذه الارباح فاننا نحصل على ارباح صافية قدرها 15000 دينار في الحالة الاولى وخسائر قدرها 5000 دينار في الحالة الثانية و 25000 دينار في الحالة الثالثة.

ولتحليل مشكلة قرار من هذا النوع فاننا نبدأ من نهاية الشجرة ونرجع الى الخلف، ونحسب القيمة المتوقعة (التوقع) لكل مجموعة محتملة من القرارات والاحداث ، وعلى هذا الاساس عندما نكون في الركن الايسر العلوي من الشكل (1)، (بمعنى اننا نقوم بتسويق السلعة وسلعة منافسة دخلت السوق، واننا قد قمنا بتحديد سعر مرتفع لسلعتنا)، فاننا نحسب القيمة المتوقعة لاحتمالات السعر المرتفع والمتوسط والمنخفض للمنافس وهذه القيمة هي:

$$(50000)\ (0.4) + (30000)\ (0.5) + (10000)\ (0.1) = 36000$$

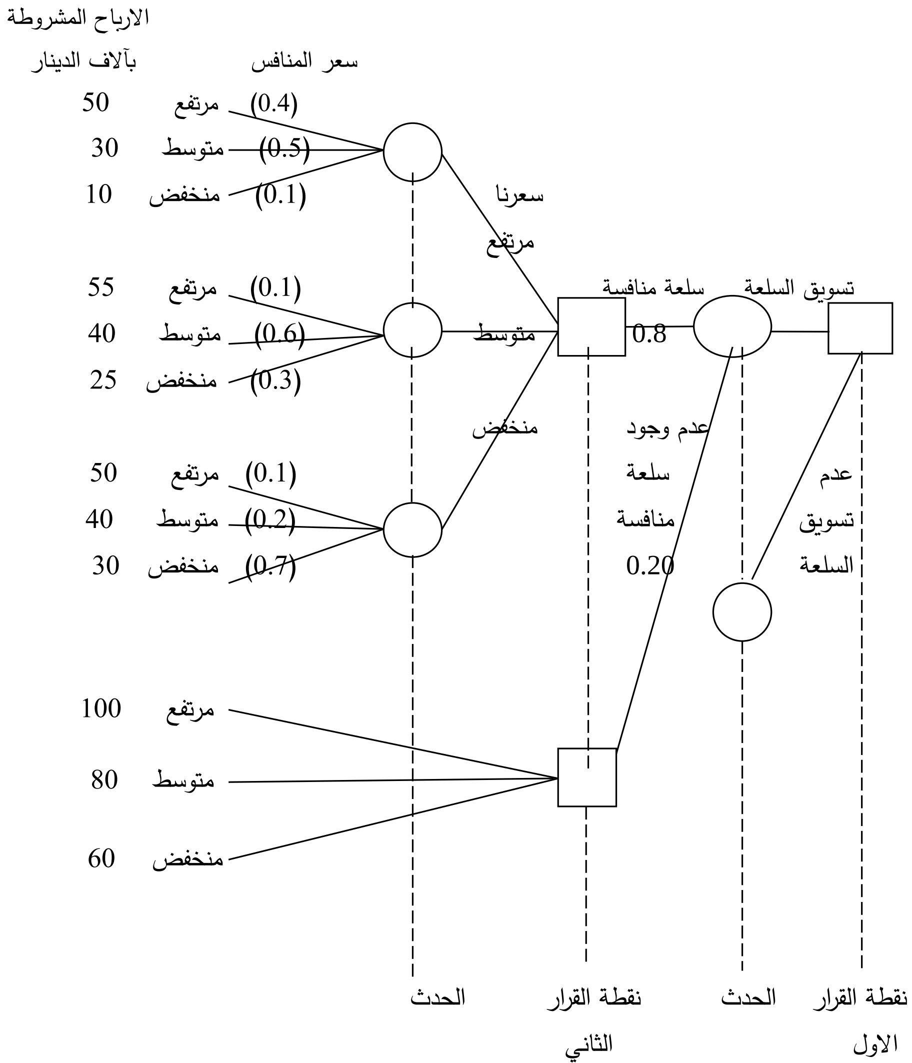
وفي حالة كان سعرنا متوسط تكون القيمة المتوقعة لاحتمالات السعر المرتفع والمتوسط والمنخفض للمنافس هي:

$$(55000)\ (0.1) + (40000)\ (0.6) + (25000)\ (0.3) = 37000$$

وفي حالة كان سعرنا منخفض تكون القيمة المتوقعة لاحتمالات السعر المرتفع والمتوسط والمنخفض للمنافس هي:

$$(50000)\ (0.1) + (40000)\ (0.2) + (30000)\ (0.7) = 34000$$

وهنا نقرر ان يكون سعرنا متوسط لانه صاحب اكبر توقع ربح (3700).



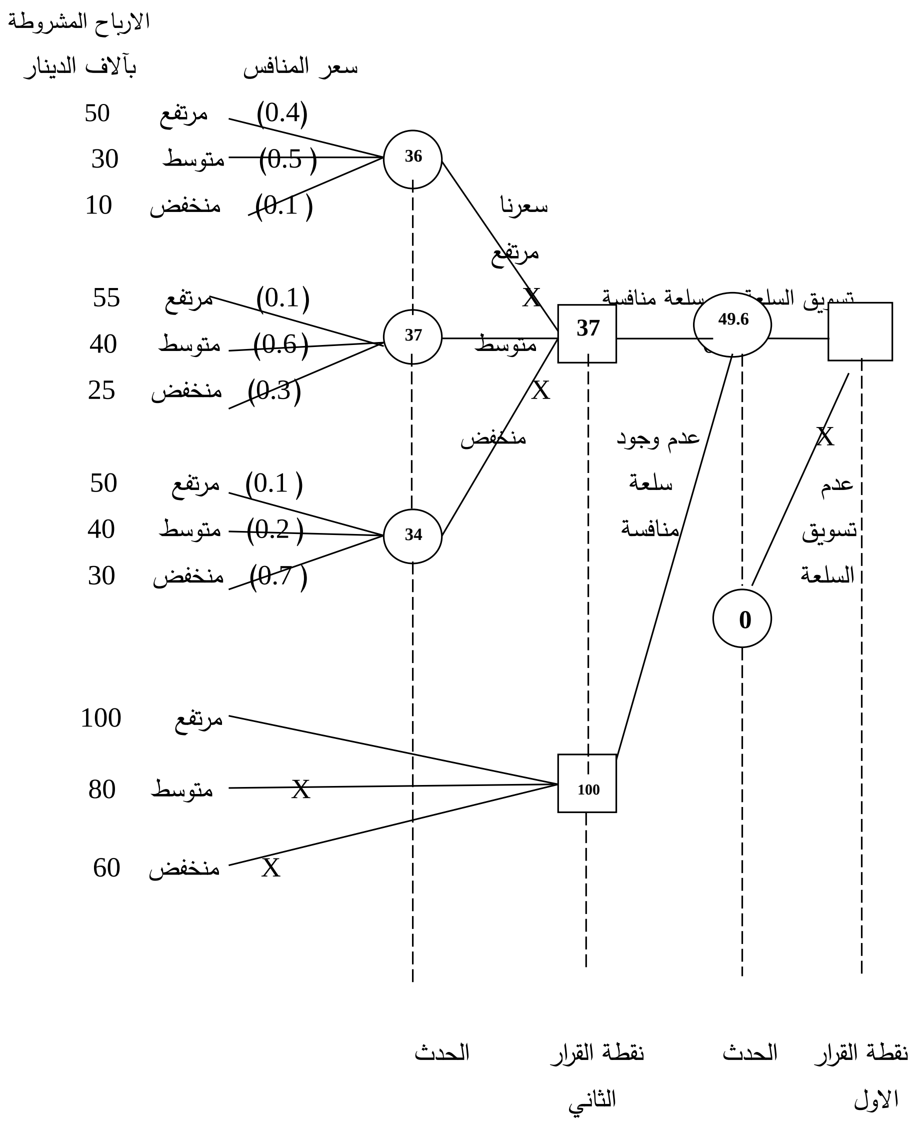
شكل (1)

نضـع هذه النتائج في الدوائر الصـغيرة في شـكل (2)، وبنفس الطريقة يتم حسـاب القيم المتوقعة لباقي النقاط.

واذا تحركنا الان الى الخلف الى نقطة القرار الثانية فاننا نواجه بحالتين: الاولى عندما يكون هناك سـلعة منافسة في السوق، والتي تتضمن تحديد اسعار مرتفعة او متوسطة او منخفضة بارباح متوقعة 36000،

37000، 34000 دينار، فاذا كان اختيارنا يستند على اعلى قيمة متوقعة فان قرارنا يكون بتحديد السعر المتوسط وتوضع علامة x على البديلين الآخرين، والتي تدل على انهما غير مثالين.

وعندما لايكون هناك سلعة منافسة في السوق فاننا نختار سعراً مرتفعاً وبربح 100000 دينار.



شكل (2)

وعلى نقطة الحدث في الجانب الايمن فقد تم حســـاب قيمة متوقعة قدرها 49600 دينار، عن طريق حاصـل ضـرب الارباح المتوقعة في حالة السـلعة المنافســة وهي (37000) في احتمال حدوثها (0.8) مضـافاً اليها الارباح المتوقعة في حالة عدم وجود سـلعة منافسـة (100000) في احتمال حدوثها (0.2)، واخيراً فقد تم التوصـل الى قرار تسـويق السـلعة، حيث ان صـافي الربح سـيكون 14600 دينار (الارباح المتوقعة 49600 مطروحاً منها تكلفة التســويق 35000) وهو اكثر من صـــفر (الربح الناتج عن عدم تسويق السلعة). **اذن فالقرار هو تسويق السلعة وتحديد سعر متوسط لها.**

7.1 تمارين الفصل الاول / القرار الاداري

1- اذا علمت ان انتاج سلعة جديدة سيتكلف 10 دنانير للوحدة باحتمال 30%، او 25 دينار للوحدة باحتمال 70%، وان السعر سيتحدد بالظروف الاقتصادية العالمية، وسيكون اما 20 دينار باحتمال 60% او 30 دينار باحتمال 40%، فهل تقوم الشركة بتسويق السلعة الجديدة ام لا ولماذا؟

2- تحتاج احدى الشركات الى مكان مؤقت لبعض عمليات التخزين الاضافية، ويمكنها ان تستأجر هذا المكان بمبلغ 600 دينار لمدة عام، او بمبلغ 1000 دينار لمدة عامين.

فاذا استأجرت المكان لمدة عام واحد، وقررت في نهاية هذا العام استئجاره لعام ثان، فان تكلفة الايجار ستكون 600 دينار ايضاً، اما اذا استاجرت الشركة المكان لمدة عامين وقررت عدم الحاجة اليه في العام الثاني فانه لايمكنها اعادة الايجار للغير او استرداد اي شيء من الـ 1000 دينار المدفوعة.

وتقدر الشركة ان هناك فرصة مقدارها 80% بانها ستحتاج الى المكان لمدة عامين وفرصة مقدارها 20% بانها ستتركه بعد عام واحد.

هل تقوم الشركة باستئجار المكان لمدة عام واحد او عامين؟ ولماذا؟

3- يمكن استخدام المعادلة التالية في التوصل الى التكلفة الكلية لاحد المنتجات:

$$C = 10000 + Bx$$

حيث 10000 تمثل التكلفة الثابنه

B تمثل التكلفة المتغيرة

X تمثل عدد الوحدات

والايراد الكلي $R = 20x$

وتكلفة الوحدة المتغيرة للفترة القادمة هي متغير عشوائي، وله التوزيع الاحتمالي الاتي:

B	**P(B)**
5	0.1
6	0.5
7	0.4

i. احســب الربح المتوقع للفترة القادمة، بافتراض ان المبيعات المتوقعة لهذه الفترة هي 1000 وحدة

ii. احســـب الربح المتوقع للفترة القادمة، بافتراض ان هناك احتمال 0.5 بان تكون المبيعات 1000 وحدة واحتمال 0.5 ان تكون المبيعات صفر

(افترض ان X,B متغيران مستقلان)

4- تمتلك احدى شركات النفط حق التنقيب عن النفط في منطقة معينة، ويمكن للشركة ان تبيع هذا الامتياز نظير مبلغ 15000 دينار، ومن ناحية اخرى يمكنها – كبديل آخر – ان تقوم بالحفر والتنقيب عن النفط، وهناك اربع نتائج محتملة من عملية الحفر تظهر في الجدول التالي مع احتمال حدوث كل منها:

قيمة العائد	الاحتمال	الناتج المتوقع
−100000	0.16	بئر جافة
50000	0.40	بئر غاز فقط
100000	0.24	بئر غاز ونفط معا
200000	0.20	بئر نفط

المطلوب:

اولاً/ هل تقوم الشركة بالحفر او بيع الحق؟ بمعنى ما هو القرار المثالي باستخدام كل من:

I. معيار الحد الاقصى للحدود القصوى Maximax

II. معيار الفرص المتساوية للحدوث

III. معيار الحد الادنى للحدود القصوى Minimax

IV. معيار الاحتمال الاقصى للحدوث

V. قاعدة بيز

ثانياً/ ارسم شجرة القرارات لهذه المشكلة، واحسب القيمة النقدية المتوقعة للتصرف " حفر "

5- تفكر احدى الشركات في القيام بحملة اعلانية لزيادة المبيعات من السلعة التي تقوم بانتاجها، وقد تم تخصيص ميزانية اعلان قيمتها 30000 دينار للعام القادم، وقد توصل مدير المبيعات مع رئيس الشركة الى التوزيع الاحتمالي التالي لتاثير الحملة الاعلانية على المبيعات السلعة:

الزيادة في المبيعات (بالوحدات)	الاحتمال
15000	0.05
20000	0.25
25000	0.30
30000	0.20
35000	0.10
40000	0.05
45000	0.05

وتحقق الشـــركة ربحاً مقداره 1.20 دينار لكل وحدة مباعة، ما هو الربح الاضـــافي المتوقع اذا قررت الشركة القيام بالحملة الاعلانية؟

8.1 حل تمارين الفصل الاول / القرار الاداري

1- نرمز للربح بـ y، ولسعر المبيع بـ A، وللتكلفة بـ B

$$Y = A - B$$

$$E(Y) = E(A - B)$$

$$= E(A) - E(B)$$

$$= [(20)(0.6) + (30)(0.4)] - [(10)(0.3) + (25)(0.7)]$$

$$= 3.5$$

اذن تقوم الشركة بتسويق السلعة ما دام الربح المتوقع موجب

2- نكون جدول الخسارة المشروطة التالي:

الحالة السائدة	الاحتمال	البدائــل	
		سنة	سنتين
سنة	0.2	600	1000
سنتين	0.8	1200	1000

الخسارة المتوقعة	
120	200
960	800
1080	1000

نختار اقل خسارة ويكون على الشركة ان تستاجر المكان لمدة سنتين.

-3

I) $C = 10000 + Bx$

$= 10000 + 1000B$

$E(C) = 10000 + 1000\,E(B)$

$= 10000 + 1000[(5)(0.1) + (6)(0.5) + (7)(0.4)]$

$= 10000 + 1000(6.3)$

التكلفة المتوقعة $= 16300$

الايراد المتوقع $(20)(1000) = 20000$

الربح المتوقع $20000 - 16300 = 3700$

ii) $E(X) = 1000(0.5) + (0)(0.5)$

$= 500$

الايراد المتوقع $(500)(20) = 10000$

التكلفة المتوقعة $C = 10000 + BX$

$E(C) = 10000 + E(BX)$

$= 10000 + E(B)\,E(X)$

$= 10000 + (6.3)(500)$

$= 13150$

الربح المتوقع = الايراد المتوقع – التكلفة المتوقعة

$= 10000 - 13150$

$= -3150$

-4

اولا / نكون جدول الارباح المشروطة التالي:

الحالة السائدة	الاحتمالات	البدائـــل	
		حفر	بيع
بئر جافه	0.16	−100000	15000
بئر غاز فقط	0.40	50000	15000
بئر غاز ونفط	0.24	100000	15000
بئر نفط فقط	0.20	200000	15000
اقصى ربح		200000	15000
اقصى خسارة		−100000	+15000

القرار المثالي هو:

i. حسب معيار Maximax القرار هو **حفر**

لان اقصى ربح هو 200000

ii. حسب معيار الفرص المتساوية القرار هو **حفر**

لانه يحقق ربح 62500 اذا حفر، بينما يحقق 15000 اذا باع حق التنقيب

نحسب الـ 62500 بجمع ارباح الحفر وقسمتها على 4

$250000 \div 4 = 62500$

iii. حسب معيار الـ Minamix القرار هو **بيع**،

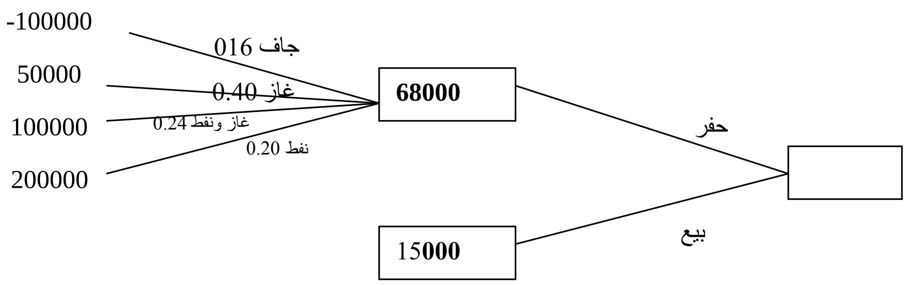
لان اقل خسارة ممكنة هي ربح 15000

iv. حسب معيار الاحتمال الاقصى، تكون حالة بئر غاز فقط هي صاحبة اكبر احتمال، وافضل بديل هو **الحفر** لانه يحقق ربح 50000 مقابل 15000 ربح البيع

v. حسب قاعدة بيز، نكون جدول بالارباح المتوقعة في الحلين، ونختار الحل صاحب اكبر ربح متوقع، ونرى بان قرار **الحفر** هو الامثل، لانه يحقق ربح 68000 دينار مقابل 15000 دينار ربح البيع.

بيز	
بيع	**حفر**
15000	-16000
15000	20000
15000	24000
15000	40000
15000	68000

ثانيا / شجرة القرارات



5- نحسب عدد الوحدات المتوقع بيعها وذلك من الجدول التالي:

الزيادة في المبيعات	الاحتمال	التوقع
15000	0.05	750
20000	0.25	5000
25000	0.30	7500
30000	0.20	6000
35000	0.10	3500
40000	0.05	2000
45000	0.05	2250
		27000

نجد ان عدد الوحدات المتوقع بيعها هو 27000 وحدة

ربح الوحدات المباعة يساوي

$$(27000)\ (1.2) = 32400$$

ربح حملة الاعلان تساوي ربح الوحدات المباعة ناقص تكلفة الاعلان ويساوي

$= 32400 – 30000$

$= 2400$

وهو الربح الاضافي المتوقع لحملة الاعلان.

الفصل الثاني

عمليات ماركوف

Markov Operations

1.2 التعريف بعمليات ماركوف Introduction to Markov Operations

تعتبر عمليات ماركوف احد الاساليب الرياضية الهامة التي يمكن استخدامها في عدد من القرارات الادارية، وفي عملية ماركوف فانه يمكن تعريف العديد من الحالات، واحتمالات الانتقال الى كل حالة يعتمد على الحالة الحالية، ومستقل عن كيفية وصولنا لهذه الحالة (الحالية).

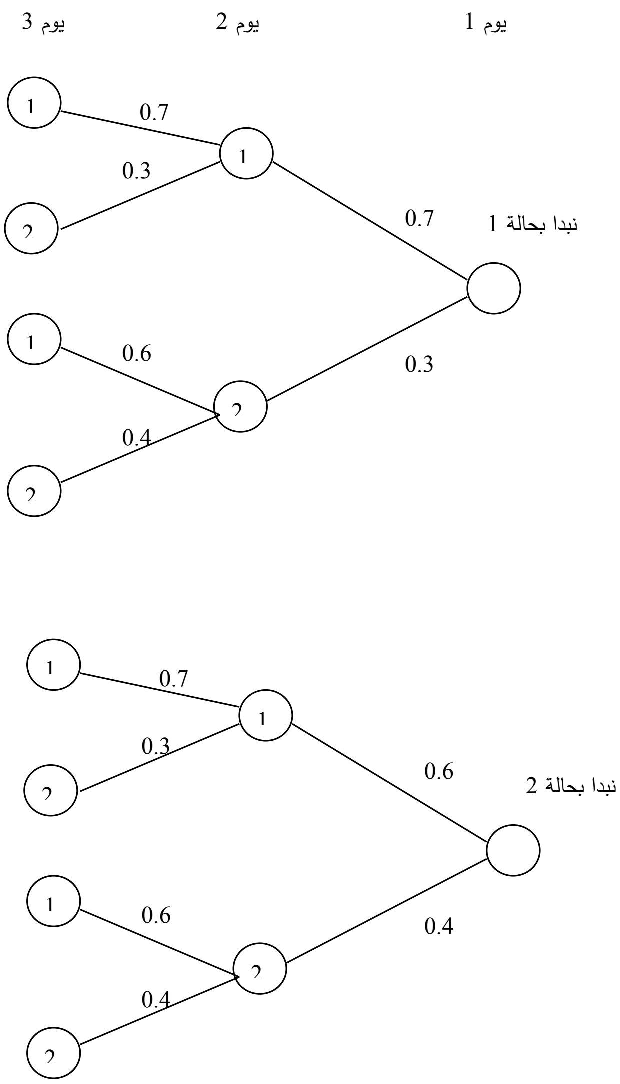
مثال 1

قد تكون الآلة (التي تستخدم في انتاج اجزاء معينة) في حالة "عمل" او في حالة "عدم عمل"، فاذا كانت الآلة في حالة عمل فان احتمال ان تكون في حالة عمل في اليوم التالي هو (0.7)، واحتمال انها ستكون في حالة عدم عمل هو (0.3)، واذا بدات الالة بحالة عدم عمل فان احتمال انها ستكون في حالة عمل في اليوم التالي هو (0.6)، واحتمال انها ستكون في حالة عمل هو (0.4)، ويظهر الجدول (1) التالي احتمالات التغير:

جدول رقم (1) احتمالات التغير

من \ الى	حالة العمل (حالة 1)	حالة عدم العمل (حالة 2)
حالة العمل حالة (1)	0.7	0.3
حالة عدم العمل حالة (2)	0.6	0.4

وتظهر هذه العملية في شكل 1 باستخدام شجرة للاحتمالات، وفي الشجرة فان الفروع المتجهة الى اعلى تظهر التحرك الى حالة 1 في حين تظهر الفروع التنازلية التحرك الى حالة 2.



شكل رقم (1)

فاذا افترضـــنا اننا بدانا من حالة 1 (حالة عمل) فان جدول 1 وشــكل 1 يظهران ان هناك احتمالا 0.7 ان الالة ستكون في حالة 1 في اليوم الثاني وفي اليوم الثالث فان احتمال ان الالة ستكون في حالة 1 هو

$$(0.7)\ (0.7) + (0.3)\ (0.6) = 0.49 + 0.18$$
$$= 0.67$$

ويمكن حساب هذا الاحتمال ايضا بالطريق التالية:

$$P\left(\text{حالة 1 في يوم 3} \;\Big/\; \text{حالة 1 في يوم 1}\right)$$

تعني احتمال ان الآلة ستكون في حالة 1 في يوم 3 بافتراض (او بشرط) انها بدات بحالة1 يوم1 وبمعرفة ان:

$$P\left(\text{حالة 1 في يوم 3} \;\Big/\; \text{حالة 1 في يوم 2}\right) = 0.7$$

$$P\left(\text{حالة 1 في يوم 3} \;\Big/\; \text{حالة 2 في يوم 2}\right) = 0.6$$

فاننا نحصل على :

$$P\left(\text{حالة 1 في يوم 3} \;\Big/\; \text{حالة 1 في يوم 1}\right) = 0.7\ P\left(\text{حالة 1 في يوم 2} \;\Big/\; \text{حالة 1 في يوم 1}\right) + 0.6\ P\left(\text{حالة 2 في يوم 2} \;\Big/\; \text{حالة 1 في يوم 1}\right)$$

= (0.7) (0.7) + (0.6) (0.3)

= 0.49 + 0.18

= 0.67

والاحتمال المقابل، وهو ان تكون الآلة في حالة 2 في اليوم الثالث، بافتراض انها بدات بحالة 1 في يوم 1 هو:

= (0.7) (0.3) + (0.3) (0.4)

= 0.21 + 0.12 = 0.33

او نستطيع ان نحصل على هذا الاحتمال بطرح احتمال حالة 1 من واحد صحيح اي

(1 – 0.67) = 0.33

وذلك لان هناك حالتين فقط ممكنتين، اما ان تكون الآلة في حالة1 او في حالة 2

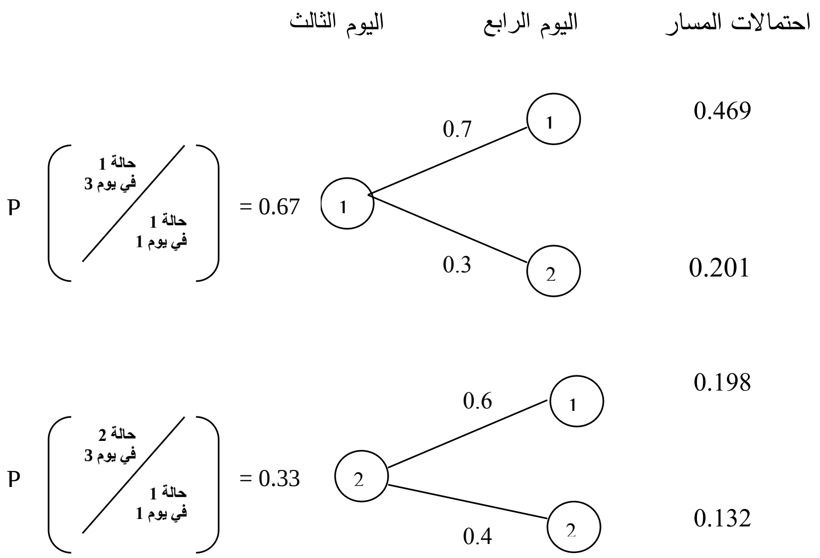
وفي ظل هذه المعلومات، فان احتمال الحالة في اليوم الرابع يمكن حسابها كالاتي (انظر شكل 2)

$$P\left(\frac{\text{حالة 1 في يوم 4}}{\text{حالة 1 في يوم 1}}\right) = 0.7\ P\left(\frac{\text{حالة 1 في يوم 3}}{\text{حالة 1 في يوم 1}}\right) + 0.6\ P\left(\frac{\text{حالة 2 في يوم 3}}{\text{حالة 1 في يوم 1}}\right)$$

= (0.7) (0.67) + (0.6) (0.33)

= 0.469 + 0.198 = 0.667

والاحتمال المقابل وهو ان تكون الآلة في حالة 2 في يوم 4 بافتراض انها بدات في حالة 1 في يوم 1 يساوي 0.333 = (1- 0.667)



شكل رقم (2)

بنفس الطريقة يمكننا ان نحسب احتمال حالة 1 للآلة في اي يوم في المستقبل، بافتراض ان الآلة بدات في حالة 1 في يوم 1، وجدول (2) يتضمن نتائج الحسابات الاخرى، ويظهر هذا الجدول ان احتمال حالة 1 في اي يوم في المستقبل بافتراض انها بدات في حالة 1 في يوم 1 تقترب من القيمة (2/3) بازياد عدد الايام.

جدول رقم (2)

رقم اليوم	احتمال ان الآلة في حالة1 في يوم في المستقبل بافتراض انها بدات بحالة1 في يوم 1
1	1.00
2	0.7
3	0.67
4	0.667
5	0.6667
6	0.66667
7	0.666667
8	0.6666667

والان اذا افترضنا ان الآلة بدات بحالة 2 (حالة عدم العمل) في يوم 1، فما هو احتمال ان الالة ستكون في حالة 1 في الايام القادمة؟

$$P\left(\text{حالة 1 في يوم 2} \,/\, \text{حالة 2 في يوم 1}\right) = 0.6$$ في اليوم الثاني

$$P\left(\text{حالة 1 في يوم 3} \,/\, \text{حالة 2 في يوم 1}\right) = 0.7\,P\left(\text{حالة 1 في يوم 2} \,/\, \text{حالة 2 في يوم 1}\right) + 0.6\,P\left(\text{حالة 1 في يوم 2} \,/\, \text{حالة 2 في يوم 1}\right)$$

$$= (0.7)\,(0.6) + (0.6)\,(0.4)$$

$$= 0.42 + 0.24$$

$$= 0.66$$ في اليوم الثالث

والاحتمال المقابل هو ان تكون الاله في حالة2 في يوم3 بشـــرط انها بدات في حالة 2 في يوم 1 هو:

$$(1 – 0.66) = 0.34$$

اوهو من الرسم $(0.16 + 0.18) = 0.34$

$$P\left(\text{حالة 1 في يوم 4} \,/\, \text{حالة 2 في يوم 1}\right) = 0.7\,P\left(\text{حالة 1 في يوم 3} \,/\, \text{حالة 2 في يوم 1}\right) + 0.6\,P\left(\text{حالة 2 في يوم 3} \,/\, \text{حالة 2 في يوم 1}\right)$$

$$= (0.7)\,(0.66) + (0.6)\,(0.34)$$

$$= 0.462 + 0.204$$

$$= 0.666$$ في اليوم الرابع

واحتمال ان تكون في حالة 2 يوم 4 بشرط ان تكون في حالة 2 يوم 1 اي:

$$P\left(\frac{\text{حالة 2 في يوم 4}}{\text{حالة 2 في يوم 1}}\right) = 1 - P\left(\frac{\text{حالة 1 في يوم 4}}{\text{حالة 2 في يوم 1}}\right)$$

= 1 - 0.666

= 0.334

والجدول (3) التالي يظهر الحسابات الاضافية

جدول رقم (3)

رقم اليوم	احتمال ان الآلة ستكون في حالة1 في يوم في المستقبل بافتراض انها بدات بحالة 2 في يوم 1
1	0
2	0.6
3	0.66
4	0.666
5	0.6666
6	0.666666
7	0.6666666
8	0.66666666

ويظهر من جدول (2) وجدول (3) ان احتمال ان تكون الآلة في حالة1 في يوم ما في المســـتقبل تميل ناحية او تقترب من الثلثين (3/2)، بصـــرف النظر عن حالة الآلة في اليوم الاول، ويطلق عليها **نســبة التوازن** Steady – State Probability لحالة 1، والنسبة المقابلة لحالة 2 تســاوي (1 – (2/3))

اي تســاوي الثلث (1/3)، ويطلق عليها نســبة احتمالات التوازن لحالة 2، ولاحتمالات التوازن هذه اهمية كبيرة في اتخاذ القرارات.

مثال 2

اذا كنا امام اتخاذ قرار باســتئجار الآلة الســابقة او آلة اخرى، فان احتمالات التوازن لحالة 2 تظهر لنا نسبة الوقت الذي ستكون فيه الآلة في حالة عدم عمل في الاجل الطويل، وهذه النسبة في مثالنا السابق تســاوي (1/3)، ســيكون لهذه النســبة اهمية كبيرة في اتخاذ قرار بشــأن الآلة التي يجب تأجيرها، حيث نحسب نسبة التوازن لحالة 2 في الآلتين ونقرر استئجار الآلة التي احتمالها اقل.

او نسبة احتمالات توازنها اقل لانه سيعني هذا انها ستكون اقل تعطيلاً.

2.2 حساب احتمالات التوازن (Balance odds)

يمكن حساب احتمالات التوازن لعملية ماركوف بطريقة اكمال جداول مثل 2، 3 ومنطقنا هو:

كلما زاد عدد الايام (n) لتصل الى رقم كبير جداً، فان احتمالات الحالات لعدد n من الايام وعدد (n+1) تكون متقاربة جداً (نفس الاحتمالات)، وهذا يعني انه باقتراب (n) من اللانهاية فان احتمال حالة1 بعد (n) من الايام سيكون نفس احتمال حالة1 بعد (n+1) من الايام وبالتالي:

$$P\left(\frac{\text{حالة 1 في يوم } n+1}{\text{حالة 1 في يوم 1}}\right) = 0.7\ P\left(\frac{\text{حالة 1 في يوم } n}{\text{حالة 1 في يوم 1}}\right) + 0.6\ P\left(\frac{\text{حالة 2 في يوم } n}{\text{حالة 1 في يوم 1}}\right) \quad ....1$$

وحسب المنطق السابق فان

$$P\left(\text{حالة 1 في يوم n+1} \Big/ \text{حالة 1 في يوم 1}\right) = P\left(\text{حالة 1 في يوم n} \Big/ \text{حالة 1 في يوم 1}\right) \quad .... \qquad 2$$

وبتعويض 2 في 1 نحصل على

$$P\left(\text{حالة 1 في يوم n} \Big/ \text{حالة 1 في يوم 1}\right) =0.7\ P\left(\text{حالة 1 في يوم n} \Big/ \text{حالة 1 في يوم 1}\right) + 0.6\ P\left(\text{حالة 2 في يوم n} \Big/ \text{حالة 1 في يوم 1}\right) \quad ....3$$

$$=0.7\ P\left(\text{حالة 1 في يوم n} \Big/ \text{حالة 1 في يوم 1}\right) + 0.6\ \left(1-P\left(\text{حالة 1 في يوم n} \Big/ \text{حالة 1 في يوم 1}\right)\right) \quad ....4$$

=2/3

ونصل الى نفس النتيجة لو افترضنا ان الآلة تبدا بحالة 2 في يوم 1 وذلك كما يلي.

$$P\left(\text{حالة 1 يوم n+1} \Big/ \text{حالة 2 يوم 1}\right) =0.7\ P\left(\text{حالة 1 يوم n} \Big/ \text{حالة 2 يوم 1}\right) + 0.6\ P\left(\text{حالة 2 يوم n} \Big/ \text{حالة 2 يوم 1}\right) \quad ....5$$

وحسب المنطق السابق فان

$$P\left(\text{حالة 1 يوم n} \Big/ \text{حالة 2 يوم 1}\right) = P\left(\text{حالة 1 يوم n+1} \Big/ \text{حالة 2 يوم 1}\right) \quad ....6$$

وبالتعويض من المعادلة 6 في 5 نصل الى

$$P\left(\text{حالة 1 في يوم n} \,/\, \text{حالة 2 يوم 1}\right) = 0.7\,P\left(\text{حالة 1 في يوم n} \,/\, \text{حالة 2 يوم 1}\right) + 0.6\,P\left(\text{حالة 2 يوم n} \,/\, \text{حالة 2 يوم 1}\right)$$

$$= 0.7\,P\left(\text{حالة 1 يوم n} \,/\, \text{حالة 2 يوم 1}\right) + 0.6\left(1 - P\left(\text{حالة 1 يوم n} \,/\, \text{حالة 2 يوم 1}\right)\right)$$

وللسهولة فاننا نستخدم P_x لتمثل احتمال التوازن للحالة x اي ان

$$P1 = P\left(\text{حالة 1 في يوم n} \,/\, \text{حالة 1 يوم 1}\right) = P\left(\text{حالة 1 في يوم n} \,/\, \text{حالة 2 يوم 1}\right)$$

$$P2 = P\left(\text{حالة 2 في يوم n} \,/\, \text{حالة 1 يوم 1}\right) = P\left(\text{حالة 2 في يوم n} \,/\, \text{حالة 2 يوم 1}\right)$$

3.2 خصائص عملية ماركوف

Characteristics of the Markov operation

1. احتمالات الانتقال الى كل حالة يتوقف فقط على الحالة الحالية، وليس على الطريقة التي توصلنا بها الى تلك الحالة الاخيرة، فعلى سبيل المثال: اذا كانت الآلة في حالة1 في يوم 2، فان احتمال تغيرها الى حالة 2 في يوم 3 هو (0.3)، بصرف النظر عن حالة الآلة في يوم 1، ويطلق على هذه الخاصية عادة صفة **عدم التذكر**، فليس هناك حاجة الى تذكر كيفية وصول العملية الى حالة

معينـة في فترة معينـة، وحالـة العملية في لحظـة معينـة من الوقت تتضـــمن جميع المعلومات الضرورية عن العملية واحتمالات التغير في المستقبل.

2. والصفة الثانية لعملية ماركوف هي وجود اشتراطات مبدئية تتناقص اهميتها باستمرار مع استمرار العملية حتى تتلاشى تماما عند وصول العملية الى مرحلة التوازن.

ويمكن **تعريف احتمالات التوازن** بانها الاحتمالات الطويلة الاجل للبقاء في حالة معينة بعد ان استمرت العملية لمدة كافية حتى تلاشت الاشتراطات المبدئية.

هذا واذا بدأت العملية بتخصــيص احتمالات حالة التوازن لاحتمالات الحالة المبدئية فاننا نجد ان احتمالات الحالات المستقبلية كلها ستتساوي مع احتمالات حالة التوازن.

4.2 استخدام عملية ماركوف في اتخاذ القرارات

Using the Markov operation in making decisions

يمكن حل بعض مشــاكل اتخاذ القرارات بتصــميم نموذج عملية ماركوف للمشــكلة المعينة، ثم حســاب احتمالات التوازن من احتمالات التغير. ولنقم بالاستمرار في مثال 1 ونفترض ان لدينا الاختيار التالي: اســـتئجار آلة 1 التي تم تحليلها او آلة ثانية (2) بافتراض ان تكلفة الايجار لهما واحدة، فاذا كانت احتمالات التغير لآلة 2 تظهر كالنالي:-

جدول رقم (4) احتمالات التغير آلة 2

من \ الى	**حالة العمل (حالة 1)**	**حالة عدم العمل حالة (2)**
حالة العمل حالة (1)	0.8	0.2
حالة عدم العمل حالة (2)	0.5	0.5

وبمقارنة جدول (4) بجدول (1) فاننا نرى ان احتمالات التغير من حالة 1 الى حالة 2 في الآلة 2 اقل منها في الآلة 1، (0.2 مقابل 0.3)، ومن ناحية اخرى فهناك ايضـاً احتمال اقل لآلة 2 لتنتقل من الحالة 2 الى الحالة 1، (0.5 مقابل 0.6)، ولاتخاذ قرار فيما يتعلق باختيار الآلة التي يجب اســـتئجارها فاننا نقوم بحساب احتمالات التوازن لآلة 2 ومقارنتها بنظيرتها لآلة 1 :

$$P\begin{pmatrix}\text{حالة 1 في يوم n} \diagup \text{حالة 1 يوم 1}\end{pmatrix} = 0.8\ P\begin{pmatrix}\text{حالة 1 في يوم n} \diagup \text{حالة 1 يوم 1}\end{pmatrix} + 0.5\left(1-P\begin{pmatrix}\text{حالة 1 يوم n} \diagup \text{حالة 1 يوم 1}\end{pmatrix}\right)$$

$$\therefore \quad P_1 = 0.8\ P_1 + 0.5\ (1\text{-}P1)$$

$$P_1 = 0.8\ P_1 + 0.5 - 0.5\ P_1$$

$$P_1 = 5/7 = 071$$

ويمكننا الان ان نقارن احتمالات التوازن لحالة 1 في الآلتين، وحيث ان احتمالات التوازن لحالة 1 في الآلة 1 هي (0.67) بينما احتمالات التوازن لحالة 1 في الآلة 2 هي (0.71)

و (0.71) اكبر من (0.67) $\qquad (0.71) > (0.67)$

فاننا سنختار استئجار آلة 2

مثال 2

اذا افترضـنا ان احد مصـانع البن يفكر في القيام بحملة اعلانية ضـخمة لحث المسـتهلكين على تجربة البن الذي يقوم بانتاجه، ومن بعض ابحاث السـوق امكن التوصـل الى تقدير للاحتملات الحالية لتحول المستهلكين من البن الذي ينتجه هذا المصنع الى اي نوع اخر وبالعكس، كما يظهر في جدول 5.

وكذلك افترض ان باحثي السوق قدروا الاحتمالات المقابلة التي ستوجد بعد الحملة الاعلانية وبعد الاخذ في الاعتبار ردود فعل المنافسين، وكانت كما تظهر في جدول 6.

جدول (5) احتمالات تغير اذواق المستهلكين بدون الحملة الاعلاتية

الى / من	**البن الذي ينتجه المصنع** **حالة 1**	**البن الذي ينتجه الاخرون** **حالة 2**
حالة 1	0.8	0.2
حالة 2	0.2	0.8

جدول رقم (6) احتمالات تغير اذواق المستهلكين بعد الحملة الاعلاتية

الى / من	**البن الذي ينتجه المصنع** **حالة 1**	**البن الذي ينتجه الاخرون** **حالة 2**
حالة 1	0.8	0.2
حالة 2	0.3	0.7

نلاحظ ان احتمال تحول المستهلكين من الانواع الاخرى الى البن الذي ينتجه المصنع قد زادت من 0.2 الى 0.3، ولكن احتمال الابقاء على المستهلكين الحاليين لم يتغير.

فاذا افترضنا ان الحملة الاعلانية ستكلف 12000 دينار سنوياً، وان هناك 50000 مستهلك للبن في السوق، وان كل مستهلك يمد الشركة بمتوسط ربح سنوي قدره ديناران، فهل يقوم المصنع بهذه الحملة الاعلانية؟

الحل

لحل هذه المشكلة نقوم اولا بحساب احتمالات التوازن لان يقوم العميل بشراء سلعتنا في ظل الظروف الحالية (بدون اعلان) ثم حسابها بعد الاعلان.

فاذا اعتبرنا ان شراء العميل لسلعتنا هو حالة 1، وشراء سلعة منتج اخر حالة 2، فان احتمالات التوازن تكون كما يلي:

$$P_1 = 0.8\ P_1 + 0.2\ (1 - P_1)$$
$$P_1 = 0.8\ P_1 + 0.2 - 0.2\ P_1$$
$$= 2/4$$
$$= 1/2$$
$$= 0.50$$

وبعد الحملة الاعلانية

$$P_1 = 0.8\ P_1 + 0.3\ (1 - P_1)$$
$$= 0.8\ P_1 + 0.3 - 0.3P_1$$
$$= 3/5$$
$$= 0.60$$

الان نقوم بتحليل النتائج وحساب ايهما اربح للمصنع وذلك كما يلي:

الفوائد التي تعود من الحملة هي ان احتمالات التوازن لان يقوم العميل بشراء سلعتنا سيزداد من (1/2) الى (3/5) اي من 50% الى 60% اي ان نصيبنا من المستهلكين سيزداد بنسبة 10% اي بـــ 5000 مستهلك جديد (0.10 x 50000) وبالتالي فان كل مستهلك جديد سيزودنا بربح دينارين اي الارباح الاضافية ستكون

$$2 \times 5000 = 10000$$

الارباح الاضافية 10000 دينار كل عام هي اقل من تكلفة الاعلان البالغة 12000 ديناراذن يكون القرار بعدم القيام بالحملة الاعلانية.

استمرار المثال 2

والان نفترض ان امام المصـنع بديل آخر للحملة الاعلانية والتي سـتتكلف 12000 دينار سـنويا، ولكن احتمالات التغير في هذه الحالة تظهر في جدول 7

جدول رقم (7)
احتمالات تغير اذواق المستهلكين بعد الحملة الاعلاتية

الى / من	انتاج المصنع حالة 1	انتاج الاخرين حالة 2
حالة 1	0.9	0.1
حالة 2	0.2	0.8

اي ستزيد الحملة من احتمال الاحتفاظ بعملائنا من 0.8 الى 0.9، ولكنها تترك احتمال التحول من انتاج الاخرين الى انتاجها بدون تغير.

ولتقييم هذه الحملة نقوم بحساب احتمالات التوازن بعد الحملة كالاتي:

$$P_1 = 0.9\ P_1 + 0.2\ (1- P_1)$$
$$= 0.9\ P_1 + 0.2 - 0.2\ P_1$$
$$= (0.2/\ 0.3) = 2/\mathbf{3}$$

اي احتمال التوازن لان يقوم المستهلك بشراء منتجاتنا يزداد من (1/2) الى (2/3)، اي اننا نتوقع ان نحصل على سوق اضافي يساوي (1/6) السوق الاجمالي المكون من 50000 مستهلك، اي ان عملاءنا سيزدادون بـ 8333 شخص، ويترتب على ذلك عائد سنوي اضافي بمقدار:

$$8333 \times 2 = 16666$$

وهذا العائد (16666 دينار) يزيد عن تكاليف الحملة الاعلانية 12000 دينار، ويحقق ربحا بمقدار 4666 دينار، وبهذا فان القرار يكون بالقيام بالحملة الاعلانية.

5.2 حالة التوازن في المشاكل الكبيرة

The state of equilibrium in big problems

لم تتعد الحالات في الامثلة السابقة حالتين فقط، ويمكن في الواقع ان نستخدم نفس المدخل لحل المشاكل الاكبر التي تتضمن اكثر من حالتين، والاختلاف الوحيد هو وجود اكثر من معادلة واحدة في هذه الحالة الاخيرة، ويتطلب الامر في هذه الحالة ان نقوم بحل هذه المعادلات للوصول الى احتمالات التوازن، (عدد المعادلات الواجب حلها يساوي دائماً عدد الحالات ناقص واحد).

مثال3

تظهر احتمالات التغير لاحدى عمليات ماركوف في جدول (8) وهي عملية تتضمن ثلاث حالات:

جدول (8)

من \ الى	**حالة1**	**حالة2**	**حالة3**
حالة1	0.6	0.3	0.1
حالة2	0.7	0.2	0.1
حالة3	0.2	0.4	0.4

للحصول على احتمالات التوازن نكتب معادلتين: الاولى للحالة1 والثانية للحالة2، كما يلي:

$$P\left(\frac{\text{حالة 1 في يوم n}}{\text{حالة 1 في يوم 1}}\right) = 0.6\,P\left(\frac{\text{حالة 1 يوم n}}{\text{حالة 1 في يوم 1}}\right) + 0.7\,P\left(\frac{\text{حالة 2 يوم n}}{\text{حالة 1 يوم 1}}\right) \quad 0.2\,P\left(\frac{\text{حالة 3 يوم n}}{\text{حالة 1 يوم 1}}\right) \quad .....1$$

$$P\begin{pmatrix} \text{حالة 2 في يوم } n \\ / \\ \text{حالة 1 في يوم 1} \end{pmatrix} = 0.3\,P\begin{pmatrix} \text{حالة 1 يوم} n \\ / \\ \text{حالة 1 في يوم 1} \end{pmatrix} + 0.2\,P\begin{pmatrix} \text{حالة 2 يوم } n \\ / \\ \text{حالة 1 يوم 1} \end{pmatrix} \quad 0.4\,P\begin{pmatrix} \text{حالة 3 يوم } n \\ / \\ \text{حالة 1 يوم 1} \end{pmatrix} \quad .....2$$

حيث ان مجموع احتمالات التوازن يساوي1

اي ان $P_1 + P_2 + P_3 = 1$

$P_3 = 1 - P_1 - P_2$

$$P\begin{pmatrix} \text{حالة 3 في يوم } n \\ / \\ \text{حالة 1 في يوم 1} \end{pmatrix} = 1 - P\begin{pmatrix} \text{حالة 1 يوم} n \\ / \\ \text{حالة 1 في يوم 1} \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} \text{حالة 2 يوم } n \\ / \\ \text{حالة 1 يوم 1} \end{pmatrix} \quad .....3$$

وباستخدام الرموز P_1, P_2, P_3, وتعويض المعادلة 3 في المعادلتين 1، 2 نحصل على

$P_1 = 0.6\ P_1 + 0.7\ P_2 + 0.2(1-P_1- P_2)$ ……... (4)

$P_2 = 0.3\ P_1 + 0.2\ P_2 + 0.4(1-P_1 – P_2)$ ……... (5)

وبالتالي

$0.6\ P_1 – 0.5\ P_2 = 0.2$ ……... (6)

$0.1\ P_1 + 1.2\ P_2 = 0.4$ ....(7)

نضرب المعادلة (7) بالعدد 6 ونطرحها من المعادلة (6)

$-7.7\ P_2 = - 2.2$ الناتج

$7.7\ P_2 = 2.2$

$P_2 = 2.2 \div 7.7 = 2/7 = 0.28$

بالتعويض عن P_2 في المعادلة 6

$$0.6\ P_1 - 0.5\ (2/7) = 0.2$$

$$0.6\ P_1 = 24/70$$

$$P_1 = 4/7$$

$$P_3 = 1 - P_1 - P_2$$

$$= 1 - 4/7 - 2/7$$

$$= 1/7$$

6.2 تمارين الفصل الثاني / عمليات ماركوف

1) تفكر شـــركة في اســـتئجار احدى آلتين (آ، ب)، ولكل آلة احتمالات مختلفة للتغير من حالة عمل (حالة 1) الى حالة عدم عمل (حالة 2) كالاتي:

احتمالات التغير: آلة آ

الى / من	حالة 1	حالة 2
حالة 1	0.9	0.1
حالة 2	0.6	0.4

احتمالات التغير: آلة ب

الى / من	حالة 1	حالة 2
حالة 1	0.8	0.2
حالة 2	0.7	0.3

اوجد احتمالات التوازن لكل آلة،

وما هي الآلة التي تفضل من وجهة نظر الشركة؟

2) يتضمن الجدول التالي احتمالات تنقل مدير احد المحلات الكبيرة بين الطوابق الثلاثة التي يتكون منها المحل:

من \ الى	الطابق الاول	الطابق الثاني	الطابق الثالث
الطابق الاول	صفر	0.4	0.1
الطابق الثاني	0.8	صفر	0.2
الطابق الثالث	0.8	0.2	صفر

احسب احتمالات التوازن.

3) يظهر الجدول التالي احتمالات التغير في سلوك عملاء احد المحلات الكبيرة في دفع او عدم دفع الفواتير الشهرية التي يتلقونها من المحل:

من \ الى	دفع (حالة 1)	عدم دفع (حالة 2)
دفع (حالة 1)	0.95	0.05
عدم دفع (حالة 2)	0.95	0.05

والمطلوب:

i. تحديد احتمالات التوازن

ii. هل يقوم المدير بالتوقف عن منح الائتمان لهؤلاء العملاء الذين لايقومون بدفع الفواتير؟

4) تحصل احدى المجلات على ربح سنوي مقداره جنيه واحد عن كل اشتراك، وقد جدد 80% من المشتركين اشتراكهم في المجلة.

وتفكر المجلة في بديلين للحصول عل اشتركات جديدة: البديل الاول هو ارسال خطابات بريدية لمجموعة مختارة من العملاء المحتملين، وتكلفة الخطاب في هذه الحالة 25 قرشا، ويتوقع ان 5% من متلقى الرسالة سيصبحون مشتركين منتظمين، والبديل الاخر هو المقابلة الشخصية، والتكلفة في هذه الحالة ستكون جنيها واحدا لكل زيارة، ولكن يتوقع ان 20% من العملاء الذين تمت زيارتهم سيصبحون مشتركين منتظمين،

والمطلوب: ما هو الاسلوب الذي يجب ان تتبعه المجلة؟

5) تمتلك شركة ابو الوفا لتاجير السيارات ثلاثة فروع في ثلاث مناطق (آ، ب، جـ)، ويمكن للعميل ان يرد السيارة المؤجرة الى اي من الفروع الثلاثة، بصرف النظر عن الفرع الذي استاجر منه السيارة، ويظهر الجدول التالي احتمالات ارجاع السيارات بكل من الفروع الثلاثة:

الى / من	آ حالة1	ب حالة2	جـ حالة3
آ (حالة1)	0.8	0.2	0.0
ب (حالة2)	0.2	0.0	0.8
جـ(حالة3)	0.2	0.2	0.6

والمطلوب:

i. حساب احتمالات التوازن

ii. تفكر الشـركة في بناء محطة صـيانة في احد الفروع الثلاثة، ما هو الفرع الذي تقترحه؟ ولماذا؟

7.2 حل تمارين الفصل الثاني / عمليات ماركوف

1) احتمالات التوازن للحالة 1 في الآلتين هو:

الآلة الاولى

$$P1 = 0.9\ P_1 + 0.6\ P_2$$

$$= 0.9\ P_1 + 0.6\ (1-P_1)$$

$$= 0.9\ P_1 + 0.6 - 0.6\ P_1$$

$$0.7\ P_1 = 0.6$$

$$\boxed{P_1 = 6/7 \qquad P_2 = 1/7}$$

الآلة الثانية

$$P1 = 0.8\ P_1 + 0.7\ P_2$$

$$= 0.8\ P_1 + 0.7\ (1-P_1)$$

$$= 0.8\ P_1 + 0.7 - 0.7\ P_1$$

$$\boxed{P_1 = 7/9 \qquad P_2 = 2/9}$$

بما ان احتمالات توازن الحالة الاولى في المدى الطويل للآلة 1 اكبر من نظيراتها في الآلة 2، يكون القرار هو استئجار الآلة الاولى.

2) احتمالات التوازن هي:

$P_1 = (0)\ P_1 + 0.8\ P_2 + 0.8\ (1- P_1 – P_2)$

$P_1 = 0.8 - 0.8\ P_1$

$\mathbf{P_1 = 8\ /18 = 24/54}$

$P_2 = 0.4\ P_1 + (0)\ P_2 + 0.2\ (1- P_1 – P_2)$

$= 0.2\ P_1 - 0.2\ P_2 + 0.2$

$1,2\ P_2 = 0.2\ P_1 + 0.2$

$1,2\ P_2 = 0.2\ (8/18) + 0.2$

$P_2 = (1.6/18 + 0.2)\ 1/1.2$

$= (1.6 + 3.6) / 18\ \ (1 / 1.2)$

$= (5.2/18)\ (1/1.2)$

$= 5.2/21.6$

$\mathbf{P_2 = 13/54}$

$P_3 = 1- P_1 – P_2$

$= 1- 24/54 - 13/54$

$\mathbf{P_3 = 17 / 54}$

(3

$$P_1 = 0.95\ P_1 + 0.95\ (1 - P_1)$$

$$= 0.95$$

هذا يدل على ان احتمالات الحالة المبدئية مساوية لاحتمالات التوازن، وبهذا ستكون جميع الاحتمالات المستقبلية متساوية ومساوية لاحتمالات التوازن وسيبقى

$$P_1 = 0.95$$

$$P_2 = 0.05$$

(4

الى / من	حالة 1	حالة 2
حالة 1	0.80	0.20
حالة 2	0.05	0.95

$$P_1 = 0.80\ P_1 + 0.05\ (1 - P_1)$$

$$\mathbf{P_1 = 0.2}$$

الربح =

$$3(0.20) - 0.25 = 0.35$$

حالة 2	حالة 1	الى / من
0.20	0.80	حالة 1
0.80	0.20	حالة 2

$P_1 = 0.80\ P_1 + 0.20\ (1- P_1)$

$P_1 = 0.5$

الربح $3(0.5)\ -1 = 0.50$

على المجلة اتباع اسلوب المقابلة الشخصية لانه اكثر ربحا

5)

i. نحسب احتمالات التوازن للحالات الثلاث وهي حالات ان تعود السيارات الى كل من الفروع 3،2،1 وذلك كما يلي:

$$P_1 = 0.80\ P_1 + 0.20\ P_2 + 0.2\ (1- P_1 - P_2)$$
$$= 1/2$$

$$P_2 = 0.2\ P_1 + 0.2\ (1-P_1 - P_2)$$
$$= 1/6$$

$$P_3 = 1- P_1 - P_2)$$
$$= 1-1/2 - 1/6$$
$$=2/6$$
$$=1/3$$

ii. نقترح ان تقام محطة الصيانة في الفرع A لانه صاحب اكبر احتمال بان تعود السيارات اليه، اي انه اكثر فرع سترد اليه السيارات.

الفصل الثالث

نظرية المباريات

Games Theory

1.3 مقدمة

نظرية المباريات هي دراسة للاستراتيجيات في مواقف النزاع، ومفهوم هذا النزاع من شخصين او اكثر (يسمى كل منهم باللاعب)، امامهم فرص لاختيار بدائل متاحة لهم، ولكن كل بديل مفتوح امام كل منهم يؤثر على قيمة ما يحققه اللاعب الاخر من عائدات، بحيث انه يوجد تعارض في الاهداف.

وتعرف الاستراتيجية بانها مجموعة من القواعد او الدوال التي بواسطتها يمكن تحديد اختيار لاعب معين في كل مرحلة حركة له خلال المباراة.

ان اهم ما يميز المشكلة ان كل لاعب يجب ان يضع في اعتباره ان ما تحققه المباراة (النزاع) من عائد يتوقف على قرارات كل المشتركين في المباراة، ومن ثم فان كل لاعب يمارس قدرا محدودا من التحكم في الموقف، وعليه ان يستخدم هذا القدر من التحكم بافضل طريقة ممكنة، فهو عندما يتخذ قرارا معينا يقيد من حرية اللاعبين الاخرين في الاختيار، ومن ناحية اخرى هو محكوم في اتخاذ قراره بما هو متوقع من تصرفات الآخرين.

والمباريات ثلاثة انواع رئيسية هي:

1. مباريات من فردين
2. مباريات ضد الطبيعة
3. مباريات متعددة الاطراف

وكل المباريات تحكمها القواعد التالية:

1. هناك فردين او اكثر يشتركون في المبارة، ولكن عدد المشتركين في اي حالة هو عدد محدود
2. لكل لاعب عدد محدود من البدائل المتاحة والتي يختار من بينها
3. قرار كل لاعب يؤثر فيما يحققه هو من عائد وفيما يحققه الاخرون المشـــتركون معه في المباراة
4. قرارات جميع اللاعبين تتخذ في نفس الوقت
5. العائد من جميع البدائل الممكنة لاستراتيجيات اللاعبين معلوم
6. البدائل المتاحة لاي لاعب متاحة ايضا لغيره من اللاعبين
7. لا يتصل اللاعبون ببعضهم البعض
8. يفترض في المباراة ان المشـــتركين فيها عقلاء، ويحكمهم المنطق في تصـــرفهم، ولهم نفس الدوافع، ونقصـــد بعقلاء هنا انه لهدف معين ومحدد ولنفس البدائل المتاحة فان كل لاعب يختار نفس الاستراتيجية.

2.3 مباريات الشخصين ذات العائد الصفري

The Two-Person, Zero-Sum Game

اعتبر مصفوفة العائد التالية:

		اللاعب B		
		B_1	B_2	B_3
اللاعب A	A1	1	−1	10
	A_2	−5	0	−4
	A_3	2	1	5

في هذه المباراة هناك ثلاثة اختيارات مفتوحة امام اللاعب A (A_1, A_2, A_3)، وثلاثة اختيارات مفتوحة امام اللاعب B (B_1, B_2, B_3)، والمصــفوفة تبين مقدار العائد للاعب A، (ولهذا سـميت مصــفوفة العائد) والمصفوفة هنا (3x 3)

لذلك فان المباراة (3x3)، و مصـــفوفة العائد الســابق توضـــح لنا مثلا ان اختيار A للاســتراتيجية A_3 واختيار B للاستراتيجية B_3 يحقق لـ A عائدا مقداره 5،

وفي مباريات الشـخصـين (لاعبين فقط) ذات العائد الصـفرى، فانه ولاي اختيار بين اللاعبين ما يكسبه اللاعب A هو ما يخسره اللاعب B، ومن ثم يكون الحاصل الكلي لدخل اللاعبين معا هو صفر، وعليه فان المصفوفة للاعب B هي نفسها مصفوفة العائد للاعب A ولكن باشارة معكوسة.

بينما يكون اللاعب A لاعب تكبير لما يكسـبه يكون اللاعب B لاعب تصـغير لما يخسـره، ان اللاعب A يعرف تماما انه اذا اختار الاسـتراتيجية A_1 فانه قد يكسـب (10) او (ا) لكنه قد يخسـر (1) اذا خصمه اختار الاستراتيجية B_2.

واذا اختار A الاسـتراتيجية A_2 فان افضـل ما يتوقعه عائدا مقداره الصـفر، لكنه قد يخسر 5 ايضـا، واذا اختار الاستراتيجية A_3 فان افضل ما يتوقعه من عائد هو 5، واسوأ عائد هو 1، وعليه ان يتوقع الاسوأ.

فاذا رجعنا الى وجهة نظر B

ان افضل عائد للاعب B هو 5 عند (A_2 , B_1)، لكنه يعلم انه لو اختار B_1 فان A لايختار A_2 بل بالاحرى يختار A_3 فيخسر B (2)

كذلك فان الخلية (A_2 , B_3) تحقق لـــــ B عائدا مقداره 4، لكنه لا يتوقع اذا اختار B_3 ان يختار A A_2، بل قد يكون اختيار A هو A_1 وهنا B يخسر 10

ان ما فعله اللاعب A في الواقع هو انه نظر الى كل ســـتراتيجية مفتوحة امامه، واختار اصـــغر عائد ممكن لهذه الاستراتيجية نتيجة لاختيار B استراتيجياته المختلفة.

ثم من كل هذه العوائد الصغرى اختار الاستراتيجية المناظرة لاكبر هذه القيم الصغرى.

وما فعله اللاعب B هو انه نظر الى كل اســــتراتيجية متاحة له، واختار اكبر خســــارة ممكنه لهذه الاستراتيجية نتيجة اختيار A استراتيجياته المختلفة، ثم من هذه القيم الكبرى للخسارة اختار الاستراتيجية المناظرة لاصغر هذه القيم الكبرى.

والتحليل السابق ممثل في المصفوفة التالية:

	اللاعب B					
		B_1	B_2	B_3	Min	
اللاعب A	A1	1	−1	10	−1	
	A_2	−5	0	−4	−5	Max Min
	A_3	2	1	2	1	
	Max	2	1	10		
Min Max						

وبذلك يكون حل المباراة هو (A_3 ,B_2) وعائد المباراة ($V = 1$).

❖ نقطة التعادل (Breakeven) or (Saddle Point)

يلاحظ في المسالة السابقة ان اكبر القيم الصغرى (Max Min) للاعب التكبير A تساوي اصغر القيم الكبرى (Min Max) للاعب التصغير B في مصفوفة العائد اي ان

Max Min = Min Max

اذا كانت المباراة لها هذه الخاصية سميت مباراة ذات نقطة التعادل، وسميت الاستراتيجية

(A_3 , B_2) نقطة التعادل (**نقطة السرج Saddle Point**)، وهي النقطة التي يستريح عندها كل من لاعب التكبير و لاعب التصـغير، لان اي انحراف عنها يقلل من عائد لاعب التكبير، ويزيد من خسـارة لاعب التصغير، و واضح ان:

- اذا كان للمباراة اكثر من نقطة تعادل (سـرج) فقيمة المدفوعات (عائد او خسـارة) عند جميع نقط التعادل متساوية.
- اذا كان هناك نقطتين للسـرج فان عمود كل منهما مع صـف الاخرى يحدد نقط سـرج اخرى، فمثلا اذا كان لمصفوفة دفع (6x4) نقطتين للسرج احدهما عند (A_2, B_1) والثانية عند (A_2, B_4) فهناك نقط سرج اخرى عند (A_2, B_1) (A_5 , B_4)

❖ السيطرة Domination

	اللاعب B			
		B_1	B_2	B_3
اللاعب A	A1	1	−1	10
	A_2	−5	0	−4
	A_3	2	1	5

ان اللاعب A يمكنه ان يسقط من اعتباره الاستراتيجية A_2 دون ان يؤثر ذلك على قيمة المباراة، وذلك لان كل القيم لعائد الاستراتيجية A_2 اقل من القيم المناظرة لها للاستراتيجية A_3

$$(-5 < 2,\ 0<1,\ -4< 5)$$

اي انه لاي اسـتراتيجية للاعب التكبير A اذا كانت قيم العوائد على الصـف المناظر لهذه الاسـتراتيجية اقل او تسـاوي القيم المناظرة لاسـتراتيجية اخرى فانه يمكن لهذا اللاعب ان يلغي او يسـقط الاسـتراتيجية الاولى من الاعتبار.

وبالمثل فان لاعب التصغير B اذا وجد قيم الخسارة على العمود المناظر لاحدى استراتيجاته اكبر من او تسـاوي القيم المناظرة لاسـتراتيجية اخرى، فانه يسـتطيع ان يلغي او يسـقط من الاعتبار الاسـتراتيجية الاولى.

وبتطبيق المفهوم السابق، نجد انه نتيجة لسيطرة الاستراتيجية A_3 على الاستراتيجيةA_2، ثم نتيجة لسيطرة الاستراتيجية B_1 على B_3 يمكن الغاء B_3, A_2 وتصبح المصفوفة:

	B_1	B_2
A_1	1	-1
A_3	2	1

وفي هذه المصفوفة الاخيرة نجد ايضا ان الاستراتيجية B2 تسيطر على الاستراتيجية B1، وبذلك يختزل المصفوفة الى:

	B_2
A_1	-1
A_3	1

ان اكتشاف السيطرة للاستراتيجيات يمكننا من اختزال مصفوفة الدفع الى حجم اقل، وبذلك يسهل كثيراً من الجهد الرياضي.

3.3 الاستراتيجيات الحرة والاستراتيجيات المختلفة
Free Strategies and Various Strategies

في المباراة كانت الاستراتيجية A_3, B_2 مرضية للطرفين، وقيمة المباراة $V= 1$، لهذا فان كل لاعب لايغير استراتيجيته، وتسمى الاستراتيجية التي يختارها بالاستراتيجية الحرة، ذلك انه يختارها اختيار مطلق طول المباراة.

ان هذا الوضع نشأ لان المصفوفة كانت ذات نقطة سرج او بمعنى اخر تحقق الشرط

Max Min = Min Max

فاذا لم يتحقق هذا الشرط نشأ وضع مغاير ولتوضيح ذلك ناخذ المثال التالي:

مثال

قرب العقد بين شركة معينة ونقابة العمال على الانتهاء، وتطلب الامر ضرورة التفاوض على عقد جديد قبل انتهاء فترة هذا العقد، فكان على كل طرف ان يعد الاستراتيجية التي سيتبعها في عملية التفاوض، فاذا كانت الاستراتيجيات المحتملة لكلا الطرفين هي:

1. سياسة الهجوم والمفاوضة العدائية واتخاذ المواقف المتشددة
2. مدخل الاقناع
3. المدخل القانوني
4. مدخل الاتفاق والتفاهم

وكانت مصفوفة العائد للنقابة (وهي مصفوفة التكلفة للشركة) على النحو التالي:

	الشركة (A)						
		A_1	A_2	A_3	A_4	Min	
النقابة B	B_1	20	15	12	35	12	Max Min
	B_2	25	14	8	10	8	
	B_3	40	2	19	5	2	
	B_4	−5	4	11	0	−5	
	Max	40	15	19	35		
Min Max							

فما هي الاستراتيجية التي يجب على كل طرف ان يتبعها؟

الحل:

لا يوجد هنا نقطة توازن (او تعادل او نقطة سـرج)، ولهذا لابد من البحث عن اسـتراتيجية مختلفة، ولهذا نقوم اولا باختصار الجدول السابق حسب مفهوم السيطرة، فنجد ان B_1 تسيطر على B_4، وبالتالي نستبعد B_4، وكل من A_2 ,A_3 تسـيطر على A_1، فنسـتبعد A_1، وهذا يؤدي الى سـيطرة B_1 على B2، وسـيطرة A_2 على A_4، وعليه نسبعد B2 و A_4، وبالتالي فان الاستراتيجيات الباقية للنقابة هي B_1 ,B_3 وللشركة هي A_2, A_3.

الشركة

النقابة		A_2	A_3
	B_1	15	12
	B_3	2	19

ويكون هدفنا الان هو التوصـل الى تشـكيلة الاحتمالات للاسـتراتيجيات، او تلك الاسـتراتيجية المختلطة التي ستحسن وضع الطرفين فيما يتعلق بالاستراتيجيات الصافية المتوفرة.

على سبيل المثال:

افترض انه من الممكن ان تستخدم الشركة استراتيجية A_2 نصف الوقت و A_3 النصف الاخر من الوقت، فاذا استخدمت النقابة الاستراتيجية B_1 فان الزيادة المتوقعة في الاجر تصبح

$$(1/2)\ (15) + (1/2)\ (12) = 13.5$$

واذا استخدمت النقابة استراتيجية B_2 فان الزيادة المتوقعة في الاجور تصبح

$$(1/2)\ (2) + (1/2)\ (19) = 10.5$$

واي رقم من هذين الرقمين من وجهة نظر الشركة افضل من الرقم الذي اظهرته قاعدة Minimax وهو (15)

والنقابة بطبيعة الحال ستطبق مثل هذه الاستراتيجية المختلفة.

ولهذا فعلى كلا الطرفين ان يبحث عن الاحتمال الذي سـيؤدي بالمنفعة المتوقعة من وجهة نظره الى ان تصـبح مسـتقلة عن اسـتراتيجية الخصـم، اي ان يبحث عن اسـتراتيجية واحدة مهما كانت اسـتراتيجية الخصم.

النقابة

نفترض ان النقابة سـتختار B_1 باحتمال P و B_3 باحتمال $1-P$ اي سـتسـتخدم اسـتراتيجية B_1 فترة من الزمن ثم تنتقل الى استراتيجية B_3.

فاذا استخدمت الشركة استراتيجية A_2 فان منفعة النقابة المتوقعة تصبح:

$$V\ (B / A_2) = 15\ P + 2(1- P)\ \ldots\ldots\ (1)$$

واذا استخدمت الشركة استراتيجية A_3 فان منفعة النقابة المتوقعة تصبح:

$$V(B / A_3) = 12P + 19(1-P) \ldots\ldots\ldots (2)$$

واذا ساوينا هاتين المنفعتين وقمنا بحل المعادلتين نصل الى:

$$15P - 2P - 12P + 19P = 99-2$$

$$20P = 17$$

$$P = \frac{17}{20} = 85\%$$

$$1 - P = \frac{3}{20} = 15\%$$

والمنفعة المتوقعة لاستراتيجية النقابة المختلفة وهي استخدام استراتيجية B_1 85% من الوقت واستراتيجية B_3 15% من الوقت هي:

$$V(B/A_2) = V(B/A_3) = 15(0.85) + 2(0.15)$$
$$= 13.05$$

وهذه القيمة اكبر من القيمة التي تنتج عن قاعدة الـ Maximin.

نقوم الان بحل نفس المشكلة من وجهة نظر الشركة، و p الان تمثل احتمال ان الشركة تختار A_2 و (1- P) احتمال اختيار الشركة A_3.

فاذا اختارت النقابة استراتيجية B_1 تكون التكلفة المتوقعة للشركة (اي الزيادة في اجور العمال) هي:

$$V(A/B_1) = 15P + 12(1-P) \;\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

واذا اختارت النقابة B_3 تكون التكلفة المتوقعة للشركة هي:

$$V(A/B_3) = 2P + 19(1-P) \;\ldots\ldots\ldots\; (4)$$

وبمساوات المعادلتين وحلها نصل الى

$$15P + 12(1-P) = 2P + 19(1-P)$$

$$13P = 7(1-P)$$

$$P = 35\%$$

$$1)\;\; P = 65\%$$

وتكون التكلفة

$$V(A/B_1) = V(A/B_3) = 15(0.35) + (12)(0.65)$$

$$= 13.05$$

وهذه التكلفة المتوقعة مستقلة عن استراتيجية النقابة وهي اقل من التكلفة الناتجة عن قاعدة الــ Min Max، والواقع ان 13.05 دينار وهي الزيادة في اجور العمال التي يجب ان يتفق عليها تعتبر مقياسا للمنفعة، وهكذا فعلى الاستراتيجية المختلطة تخفيض التكلفة القصوى للشركة الى ادنى حد وزيادة الاجور الدنيا للنقابة الى اقصى حد.

وبالتالي فان المنفعة المتوقعة يجب ان تقع بين 12 و15 الحدود الدنيا والقصـــوى لزيادة الاجور وتكلفة الشركة، بهذا المفهوم السابق نجد ان كل طرف يحاول ان يجعل المباراة لاتتاثر باختيار خصمه.

4.3 مباريات المجموع غير الصغرى Non-Zero Sum Games

مثال

شركتان امامها قرار القيام (او عدم القيام) بحملة اعلانية، ويظهر الجدول التالي جدول العائد لهذا القرار (اعلان او عدم اعلان):

2 / 1	عدم الاعلان	اعلان
عدم الاعلان	+2 / +2	+5 / −15
اعلان	−15 / + 5	−10 / −10

وتشير الارقام في الجدول الى المنفعة للشركتين لكل زوج من القرارات: منفعة شركة 1 ومنفعة شركة 2،

فعلى سبيل المثال لو ان الشركة 1 قامت بالاعلان في حين لم تقم شركة 2 بالاعلان فان منفعة شركة 1 ستكون (5) ومنفعة شركة 2 ستكون (15−)

جدول العائد لشركة 2

2 / 1	عدم الاعلان	اعلان
عدم الاعلان	2	5
اعلان	−15	−10

ايا كان قرار شركة 1 فان قرار شركة 2 سيكون الاعلان، لانه لو قامت شركة 1 بعدم الاعلان ستكون منفعة شـــركة2 (5) وهو افضـــل من منفعة 2 لو لم تعلن ثم لو قامت شـــركة 1 بالاعلان فان شـــركة2 ستفضل ايضا الاعلان لانها تفضل خسارة 10 على خسارة 15.

اذن فان قرار شركة 2 العقلاني هو الاعلان مهما كان قرار الشركة 1.

اي ان قرار الاعلان يسيطر على قرار عدم الاعلان.

وينطبق نفس التحليل على الشركة 1

جدول العائد لشركة 1

2 / 1	عدم الاعلان	اعلان
عدم الاعلان	2	15-
اعلان	5	10-

فقرار الاعلان يسيطر على قرار عدم الاعلان، ويكون قرار الشركة 1 هو ايضا الاعلان مهما كان قرار الشركة2.

وبهذا فان القرار الرشيد للشركتين هو الاعلان وخسارة قدرها 10 لكل منهما، واما اذا لم تتصف الشركتان بذلك النوع من الرشد فانهما قد يتبعان السياسة او الاستراتيجية المسيطر عليها وليس المسيطرة اي استراتيجية عدم الاعلان ويحققان ربحا قدره 2 لكل منهما.

ويتطلب هذا التحليل (بطبيعة الحال) عدم تعاون الشركتين وعدم معرفة اي منهما باتجاهات الاخر، ويفترض هذا التحليل ايضا ان المباراة تلعب مرة واحدة بدون تعلم ناتج عن خبرة سابقة.

بالطبع ان هذا الحل يعتبر غير مرض، وقد يصل متباريان غير رشيدين الى قرار افضل من وجهة نظرهما، حيث لا تقوم الشركتان بالاعلان، **فمباريات المجموع غير الصغرى غالبا ما تؤدي الى حلول غير مرضية.**

5.3 تمارين الفصل الثالث / نظرية المباريات

1) يظهر الجدول الآتي مصـــــفوفة العائد للمتباريين آ، ب، وتمثل الارقام في الجدول التالي المنفعة التي يكتسبها آ والتي يخسرها ب لاي تقاطع للاستراتيجيات:

A	B	
	B1	**B2**
A1	10	6
A2	8	12

والمطلوب:

I. ماهو الحد الأقصى للحدود الدنيا للارباح التي يمكن ان يحصل عليها A ؟

(بكل تاكيد) باتباع استراتيجية صافية؟

II. ما هو الحد الادنى للحدود القصوى للخسائر التي يمكن ان يحققها B ؟

(بكل تاكيد) باتباع استراتيجية صافية؟

III. ما هي الاستراتيجية المختلطة للمتباري آ؟

IV. لو ان A و B اتبعا الاستراتيجية المختلطة، فما هي قيمة المباراة؟

2) يظهر الجدول الآتي مصفوفة العائد المناسب لاستراتيجيات التسويق لشركتين متنافستين B , A

استراتيجيات A	استراتيجيات **B**	
	B1	**B2**
A1	صفر / صفر	2 / 1
A2	1 / 4	2 / 5

المطلوب:

I. ما هي الاستراتيجية التي سيتبعها A، ولماذا؟

II. ما هي الاستراتيجية التي سيتبعها B، ولماذا؟

III. ما هو العائد او الناتج الذي تتوقعه لهذا الوضع؟

3) تتنافس الشـركتان 1، 2 على احد الاسـواق، وما تربحه الشـركة الاولى تخسـره الشـركة الثانية، ويظهر الجدول الآتي المنفعة التي تحصـل عليها الشـركة الاولى من السـوق، باسـتخدام الاعلان بدرجات مختلفة (افترض ان المباراة ذات مجموع صفري).

منفعة الشركة آ

شركة 1	شركة 2		
	بدون اعلان	اعلان متوسط	حملة اعلانية ضخمة
بدون اعلان	60	50	40
اعلان متوسط	70	60	50
حملة اعلانية ضخمة	80	70	75

المطلوب: اوجد حل التعادل

4) تقوم الشـركتان آ و **ب** بانتاج نوع واحد من الآلات الميكانيكية، وتتنافســان على بيع هذه الآلات الى شـركتين س و ص ويعمل لدى الشـركة آ اربعة رجال تسـويق، بينما يعمل لدى الشـركة **ب** ثلاثة رجال تسـويق فقط، ويجب على الشـركتين آ و **ب** ان تحدد عدد رجال التسـويق الواجب تخصـيصـهم لكل من الشـركتين س و ص، وسـتقوم كل شـركة من الشـــركتين س و ص بشـــراء 70 آلة فقط، ويرتبط احتمال شـــراء الآلات بعدد رجال التسويق الذين سيقومون بزيارتها كنسبة من عدد الزيارات الكلية.

المطلوب

I. اعداد جدول العائد للشـركتين **A** و **B**، على اسـاس ان العائد هو العدد المتوقع ان تبيعه **A** من الآلات، وبالتالي فان العائد للشـركة **B** سـيكون 140 مطروحا منه عائد الشركة **A**

II. ما هي الاسـتراتيجيات التي يجب ان تسـتخدمها كل من الشـركتين **A** و **B** في توزيع رجال التسويق الذين يعملون لديهم؟ وما هي قيمة المباراة للشركتين؟

6.3 حل تمارين الفصل الثالث / نظرية المباريات

1)

	B_1	B_2	اقل ربح
A_1	10	6	6
A_2	8	12	8
اقصى خسارة	10	12	Max Min

Min Max

I. Max Min = 8

II. Min Max = 10

III. لتكن P هي نسبة الوقت المستخدم في A_1

و 1-P هي نسبة الوقت المستخدم لـ A2

(A/B1) = 10P + 8(1-P)

(A/B2) = 6P + 12(1-P)

(A/B1) = (A/B2)

10P + 8(1-P) = 6P + 12(1-P)

P = 0.50

∴ سيستخدم الاستراتيجية A_1 50% من الوقت و A_2 50%.

IV. قيمة المباراة هي:

10(0.50) + 8(0.50) = 9

2)

I. مصفوفة A هي

	B_1	B_2
A_1	صفر	1
A_2	4	5

A_2 تسيطر على A_1

$\therefore$ A_2 هي الاستراتيجية المتبعة

II. مصفوفة B هي

	B_1	B_2
A_1	صفر	2
A_2	1	2

B_2 تسيطر على B_1

$\therefore$ B_2 هي الاستراتيجية المتبعة

III. الاستراتيجية المتبعة هي A_2 B_2

قيمة العائد هي 5 لـ A و 2 لـ B

(3

شركة 1

	B_1	B_2	B_3	اقل ربح
A_1	60	50	40	40
A_2	70	60	50	50
A_3	80	70	75	maxmin 70
اقصى خسارة	80	minmax 70	75	

حل التعادل هو A_3 B_2 هي نقطة التعادل

(4

		1	2	3	4
	ب / آ	3← س 0← ص	2← س 1← ص	1← س 2← ص	0← س 3← ص
1	4 ← س 0← ص	65 / 75	94 / 46	84 / 56	70 / 70
2	3← س 1← ص	35 / 105	66 / 74	64 / 76	53 / 87
3	2← س 2← ص	42 / 98	58 / 82	58 / 82	42 / 98
4	1← س 3← ص	53 / 87	64 / 76	66 / 74	35 / 105
5	0← س 4← ص	70 / 70	84 / 56	94 / 46	65 / 75

نصل الى الاستراتيجية باسلوب السيطرة بعد ان ناخذ قيم أ لوحدها وقيم ب لوحدها

ملاحظات على الحل :

نصل الى قيم المربع (1،1) كما يلي:

بالنسبة لـ أ سيبيع الى س 70 (7/ 4) = 40 آلة

سيبيع الى ص 70(1/2) = 35 آلة لان كل منهما لم يرسل احد الى ص

بالنسبة لـ ب سيبيع الى س , ص 140 - 75 = 65

او 70 (3/7) + 70(1/2) = 65

ونصل الى قيم المربع (2،1) كما يلي:

بالنسبة لـ أ سيبيع الى س 70 (4/6) = 46 آلة

لن يبيع اي آلة الى ص لانه لم يرسل احد الى ص

وهكذا بالنسبة لباقي قيم الجدول.

الجزء الثاني: البرمجة الخطية

مقدمة

تكاد تكون مشـكلة التعظيم والتصـغير (Maximization and Minimization) من اكثر المشـاكل التي تواجهنا في الحياة العملية الاقتصـادية وفي الدراسـات التطبيقية، فكثيراً ما نكون معنيين بمعرفة قيمة بعض المتغيرات التي تجعل ربحنا اكبر ما يمكن او تجعل تكلفة انتاجنا اقل مايمكن.

في السـنوات الاخيرة امكن التغلب على مشـاكل من نوع تعظيم او تصـغير دالة هدف معينة بمتغيرات عديدة مختلفة خاضعة لمجموعة من الشروط، وذلك باستخدام بعض النماذج الرياضية.

في يومنا هذا معظم المشاكل تحتوي على العديد من المتغيرات، وكذلك على العديد من الشروط أو القيود التي هي على شكل متباينات اكثر منها على شكل متساويات، والتي تشـترط ان تكون جميع المتغيرات الاساسية متغيرات غير سالبة.

من اكثر الطرق التي تلعب دوراً هاماً في حل مثل هذه المشاكل طريقة البرمجة الخطية.

من الممكن التعبير عن الشكل العام لمشكلة البرمجة الرياضـية بأنها تعظيم او تصـغير دالة هدف معينة خاضعة لمجموعة من القيود، اي هي تحديد قيم X_j التي تعظم او تصغر دالة الهدف:

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

بشرط ان:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m) \leq 0$$

وايضاً:

$$X_j \geq 0$$

حيث:

$$\begin{pmatrix} i = 1,2, \ldots m \\ j = 1,2, \ldots n \end{pmatrix}$$

ان نجاحا خاصا قد تحقق في تطوير اساليب معينة لحل المسائل التي لها الخواص التالية:

1. دالة هدف خطية
2. مجموعة من القيود الخطية وهي ما تعرف بالقيود الهيكلية
3. قيود غير سالبة

وهذه الاساليب هي أساليب البرمجة الخطية.

اما اذا تغير شرط من الشروط الثلاثة فاننا لانستطيع استخدام طرق البرمجة الخطية، وقد نستخدم عند ذلك طرق اخرى وهي طرق البرمجة غير الخطية.

لم تكن قد تمت صياغة المشكلة العامة للبرمجة الخطية حتى عام 1947، ففي ذلك الوقت دُعي بعض العلماء والخبراء في سلاح الجو الاميركي لدراسة امكانية تطبيق الطرق والاساليب العلمية والرياضية في ادارة الحرب وتنظيم الدفاع الوطني، فوضع DANTZIG الصيغة الرياضية الاولية لمسائل البرمجة الخطية على الصورة التالية:

تحديد قيم X_j التي تجعل دالة الهدف

$$f(X) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n = \sum_{j=1}^{n} C_j\, X_j$$

اكبر ما يمكن أو اقل مايمكن بشرط أن:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha ijX \leq bi$$

وان $X_j \geq 0$

حيث: $i = 1,2,\dots m$

$j = 1,2,\dots n$

وايضـــا قام DANTZIG في عام 1947 بتطوير واحدة من اهم طرق البرمجة الخطية، وهي ماتعرف بطريقة سمبلكس SIMPLEX.

هذا وقد دخل استخدام البرمجة الخطية في حل كثير من مسائل الصناعة والانتاج وفي طرق المدخلات والمخرجات في الاقتصاد وغيرها.

ان موضوع البرمجة الخطية سيطور في الايام القادمة، وستصبح له اهمية كبرى في الميادين التطبيقية والاكاديمية، واننا في هذا الكتاب سنحاول التعرف على المبادئ الاساسية والمفاهيم الرئيسية للبرمجة الخطية، بكل بساطة، وسنحاول قدر الامكان تجنب الرياضيات العليا في معالجتنا للموضوع.

الفصل الرابع

صياغة نماذج البرمجة الخطية

Formulating linear programming models

في هذا الفصل سنقدم بعض المسائل التي لها وضع خاص، لنبين كيف يكون تنظيم المعلومات المتجمعة عن هذه المسائل في جداول، ومن ثم كيف يكون تكوين او صياغة نموذج رياضي لكل مسألة، ومن ثم تعميم صيغة النموذج الرياضي.

1.4 مشكلة الغذاء Food Problem

المشـــكلة هي تحديد الخليط الامثل للانواع المتاحة من الطعام التي تتفق مع حد ادنى محدد لمتطلبات التغذية والمقصود هنا بالخليط الامثل هو الخليط الاقل تكلفة. للتوضيح اليك المثال العددي التالي:

مثال (1)

افترض ان لدى وزارة التربية فكرة لتقديم وجبة غذائية لطلبة المرحلة الابتدائية، وافترض انه اتفق ان تتضمن هذه الوجبة حليب ولحم وبيض، افترض ايضا انه بناء على البحوث الصحية، تبين ان الطالب في هذا الســـن يحتاج على الاقل 40 ملليغرام يوميا من فيتامين A و50 ملليغرام يوميا من فيتامين B، ومن المعلوم ان:

1 كيلو غرام من الحليب يعطي 1 ملليغرام من فيتامين A و 10 ملليغرام من B

1 كيلو غرام من اللحم يعطي 5 ملليغرام من فيتامين A و 8 ملليغرام من B

1 دزينة من البيض يعطي 10 ملليغرام من فيتامين A و 10 ملليغرام من B

افترض ان:

تكلفة كيلوغرام الحليب 10 ريال

تكلفة كيلوغرام اللحم 65 ريال

تكلفة دزينة البيض 25 ريال

يمكن تنظيم جميع المعلومات المعطاة في المسألة في الجدول التالي:

الحد الادنى للمتطلبات اليومية	**البيض**	**اللحم**	**الحليب**	**نوع الطعام** / **الفيتامينات**
40	10	5	1	A
50	10	8	10	B
	25	65	10	تكلفة الوحدة

الان يمكننا وضع المشكلة بالصورة التالية:

تحديد عدد كيلوغرامات كل من الحليب واللحم وعدد دزينات البيض التي يجب خلطها معا لتكوين الوجبة الغذائية، والتي تحقق الحد الادنى من المتطلبات اليومية من فيتامينات A وB، وتحقق في نفس الوقت اقل تكلفة ممكنة.

لصياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة دع:

x_1 تمثل عدد كيلوغرامات الحليب

x_2 تمثل عدد كيلوغرامات اللحم

x_3 تمثل عدد دزينات البيض

التكلفة الاجمالية تكون تساوي:

$$10X_1 + 65X_2 + 25X_3$$

التكلفة الاجمالية هذه دالة في المتغيرات $X_J{}'^S$ وتكتب عادة على صورة $f(X)$ أي ان:

$$f(x) = 10X_1 + 65X_2 + 25X_3$$

عدد وحدات الفيتامين A في الوجبة يكون مساوياً:

$$X_1 + 5X_2 + 10X_3$$

عدد وحدات الفيتامين B في الوجبة يكون مساوياً:

$$10X_1 + 8X_2 + 10X_3$$

ولكن كما هو محدد في المسألة فأن الحد الادنى للمتطلبات اليومية من فيتامين A وB هو 40،50 على التوالي، وبناء عليه فأننا نحصل على :

$$X_1 + 5X_2 + 10X_3 \geq 40$$
$$10X1 + 8X_2 + 10X_3 \geq 50$$

ايضـــاً بما أن X_3،X_2،X_1 تمثل كميات، فان قيمها يجب ان تكون غير ســـالبة اي اكبر من او تســـاوي صفر.

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0$$

وبهذا يصبح النموذج الرياضي على الصورة التالية:

ماهي قيم X_3,X_2,X_1 التي تجعل دالة التكلفة التالية:

$$f(x) = 10X_1 + 65X_2 + 25X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اقل مايمكن بشرط تحقق:

$$X_1 + 5X_2 + 10X_3 \geq 40 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$10X1 + 8X2 + 10X_3 \geq 50$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0 \ , \ X_3 \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

في هذا النموذج:

$f(x)$ تدعى دالة الهدف Objective Function

والمتباينات (2) تدعى القيود الهيكلية Structural Constraints

والمتباينات (3) تدعى القيود غير السالبة Non - Basic Variables

و $X_j^{,s}$ تدعى متغيرات القرار Decision Variables

تعميم المشكلة

لتعميم هذه المسألة دع:

n = عدد انواع الطعام

m = عدد الفيتامينات

j = نوع الطعام

i = نوع الفيتامين

aij = عدد وحدات الفيتامين i في وحدة الطعام j

bi = عدد الوحدات المطلوب من الفيتامين i

cj = تكلفة الوحدة من الطعام j

Xj = عدد الوحدات من الطعام j

وهذه يمكن تنظيمها في الجدول التالي:

الطعام / الفيتامين	1	………	J	………	n	عدد وحدات الفيتامينات
1 . .	a_{11} . .	……… ……… ………	a_{1j} . .	……… ……… ………	a_{1n} . .	b_1 . .
i . . .	a_{ij} . . .	……… ……… ……… ………	a_{ij} . . .	……… ……… ……… ………	a_{in} . . .	b_i . . .
m	a_{m1}	………	a_{mJ}	………	a_{mn}	b_m
تكلفة الوحدة	C_1	………	C_j	………	C_n	

ويصبح النموذج الرياضي:

تحديد قيم X_1 ،X_2 ،X_3 ………X_n التي تجعل الدالة

$$f(x) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$$

اقل مايمكن بشرط تحقق القيود الهيكيلية التالية:

$$
\begin{array}{llll}
a_{11} X_1 & +a_{12} X_2 & +\ldots\ldots+a_{1n} X_n & \geq b_1 \\
a_{21} X_1 & +a_{22} X_2 & +\ldots\ldots+a_{2n} X_n & \geq b_2 \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
a_{i1} X_1 & +a_{i2} X_2 & +\ldots\ldots+ai_n X_n & \geq bi \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
a_{mi1} X_1 & +a_{m2} X_2 & +\ldots\ldots+am_n X_n & \geq bm
\end{array}
$$

ويمكن كتابة هذا بصيغة المجاميع كمايلي:

تحديد قيم X_j و $(j = 1,2,\ldots,n)$ التي تجعل الدالة التالية اقل مايمكن:

$$f(x) = \sum_{j=i}^{n} cj\, Xj$$

بشرط تحقق:

$$\sum_{j=1}^{n} aijXj \geq b_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

$X_j \geq 0$ و

2.4 مشكلة الانتاج Production Problem

افترض ان مؤسسة صناعية تنتج منتوجات مختلفة، وكل منتوج يجب ان يمر بعدة مراحل باعلى مايمكن من الامكانية او القدرة، المشـــكلة هي في تحديد الكميات التي يجب انتاجها من كل منتوج لتحقيق اكبر فائدة ممكنة.

للتوضيح اليك المثال التالي:

مثال 2

تنتج احدى شـركات الاثاث 4 موديلات (نماذج) من المقاعد هي: A، B، C، D، كل مقعد يصـنع اولا في قسم النجارة، ثم يمر في قسم الدهان، واخير يمر في قسم الانجاز (وضـع اللمسـات الاخيرة)، افترض انه لايوجد في قســم النجارة اكثر من 6000 ســاعة عمل رجل، وانه لايوجد في قســم الدهان اكثر من 4000 ساعة عمل/ رجل، وانه لايوجد في قسم الانجاز اكثر من 5000 ساعة عمل /رجل.

اذا كان عدد ساعات عمل/ رجل المطلوبة لكل مقعد في الاقسام الثلاثة هي على الترتيب:

المقعد الواحد من النموذج A يحتاج الى 2،1،2 ساعة عمل / رجل

المقعد الواحد من النموذج B يحتاج الى 3،2،2 ساعة عمل / رجل

المقعد الواحد من النموذج C يحتاج الى 4،2،3 ساعة عمل / رجل

المقعد الواحد من النموذج D يحتاج الى 4،3،3 ساعة عمل / رجل

ارباح المقعد الواحد من النموذج A هي 1.2

ارباح المقعد الواحد من النموذج B هي 2.0

ارباح المقعد الواحد من النموذج C هي 1.8

ارباح المقعد الواحد من النموذج D هي 4.0

يمكننا جمع المعلومات السابقة في الجدول التالي:

النماذج / **الاقسام**	**A**	**B**	**C**	**D**	**القدرات المتاحة**
قسم النجارة	2	3	4	4	6000
قسم الدهان	1	2	2	3	4000
قسم الانجاز	2	2	3	3	5000
ربح الوحدة	**1.2**	**2.0**	**1.8**	**4.0**	

افترض ان المواد الاولية والتموينية موجودة، وان كل المقاعد المنتجة يمكن بيعها، وان شـركة الاثاث تريد تحديد او معرفة الكميات التي يجب انتاجها من كل نوع لتحقيق اكبر ربح ممكن.

لصياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة دع:

$X_1 =$ عدد المقاعد التي يجب انتاجها من النوع A

$X_2 =$ عدد المقاعد التي يجب انتاجها من النوع B

$X_3 =$ عدد المقاعد التي يجب انتاجها من النوع C

$X_4 =$ عدد المقاعد التي يجب انتاجها من النوع D

اجمالي الربح يساوي:

$$1.2X_1 + 2X_2 + 1.8X_3 + 4X_4$$

هذا الربح الاجمالي دالة في المتغيرات X J,S وتكتب عادة على صورة $f(x)$ اي:

$$f(x) = 1.2X_1 + 2X_2 + 1.8X_3 + 4X_4$$

عدد الساعات عمل / رجل المطلوبة في قسم النجارة هو:

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 4X_4$$

ولكننا نعلم بان الحد الاقصى لعدد الساعات عمل / رجل المتاحة او الموجودة في قسم النجارة هو 6000

$$\therefore 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 4X_4 \leq 6000$$

وبنفس المفهوم يكون عدد ساعات عمل / رجل الموجودة في قسم الدهان هو:

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 3X_4 \leq 4000$$

وايضا يكون عدد ساعات عمل / رجل الموجودة في قسم الانجاز هو:

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 3X_4 \leq 5000$$

وايضا بما ان X_4, X_3, X_2, X_1 عبارة عن كميات فان:

$$X_1 \geq 0 \text{، } X_2 \geq 0 \text{، } X_3 \geq 0 \text{، } X_4 \geq 0$$

ويصبح النموذج الرياضي

تحديد قيم X_4, X_3, X_2, X_1 التي تجعل دالة الهدف اكبر مايمكن:

$$f(x) = 1.2X_1 + 2X_2 + 1.8X_3 + 4X_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

بشرط ان:

$$\left.\begin{array}{l} 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 4X_4 \leq 6000 \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 3X_4 \leq 4000 \\ 2X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 3X_4 \leq 5000 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0\ ,\ X_3 \geq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$f(x)$ هي دالة الهدف

المتباينات (2) هي القيود الهيكلية

المتباينات(3) هي القيود غير السالبة

$j = 1,2,\ldots\ldots n$ هي متغيرات القرار

تعميم المشكلة

لتعميم هذه المشكلة دع:

n = عدد النماذج

m = عدد المراحل (الاقسام)

j = النموذج $j = 1, 2, \ldots, n$

i = القسم $i = 1, 2, \ldots.., m$

a_{ij} = عدد ساعات عمل/ رجل المطلوبة في القسم لانتاج وحدة واحدة من النموذج j

b_i = مجموع اعات عمل/ رجل المتاحة في المرحلة i

c_i = ربح الوحدة الواحدة من النموذج j

x_j = الكمية التي يجب انتاجها من المنتج j

وهذه يمكن جمعها في الجدول التالي:

النماذج : الاقسام	: 1	:	: j	:	: n	الامكانات المتاحة
1 . .	a11 . .	....	a_{ij} . .	....	a_{1n} . .	b_1 . .
i	a_{ij}	....	a_{ij}	....	a_{in}	b_i
. . m	. . a_{m1}	....	. . a_{mj}	....	. . a_{mn}	. . b_m
ربح الوحدة	$\mathbf{c_1}$	....	$\mathbf{c_j}$	....	$\mathbf{c_n}$	

ويصبح النموذج الرياضي

تحديد قيم $X_1, X_2\ldots, X_n$ التي تعظم الدالة:

$$f(x) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_2X_n$$

بشرط ان:

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11} X_I & +a_{12} X_2 & +\ldots\ldots\ldots+a_{1n} X_n & \leq & b_1 \\
a_{21} X_1 & +a_{22} X_2 & +\ldots\ldots\ldots+a_{2n} X_n & \leq & b_2 \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
a_{i1} X_1 & +a_{i2} X_2 & +\ldots\ldots\ldots+ai_n X_n & \leq & b_i \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
a_{mi1} X1 & +a_{m2} X_2 & +\ldots\ldots\ldots+am_n X_n & \leq & b_m
\end{array}
$$

وان

$$X1 \geq 0,\ X2 \geq 0, \ldots, X_n \geq 0$$

وهذا يمكن كتابته على صيغة المجاميع كمايلي:

تحديد قيم X_j $(j=1,2,\ldots n)$ التي تعظم الدالة

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

بشرط ان

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$$

وان:

$$X_j \geq 0$$

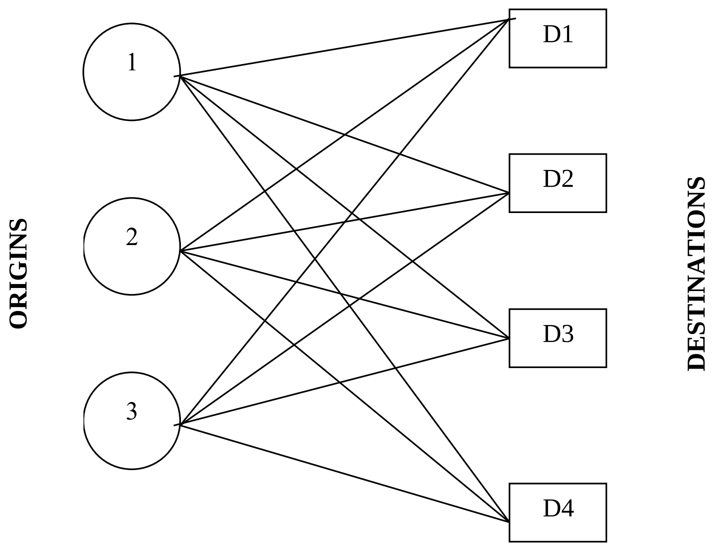
3.4 مشكلة النقل Transportation Problem

لندرس الان مشـــكلة نقل منتوج معين من مراكز انتاج مختلفة (Origins) الى مراكز الاســـتهلاك او المخازن (DESTINATIONS) باقل تكلفة ممكنة، وهي المشكلة المعروفة باسم مشكلة النقل.

ولندرس الان هذا المثال التوضيحي:

مثال 3

افترض ان مصـــــنعا ما له ثلاثة مراكز انتاج (ORIGINS)، هي: O_3,O_2,O_1 وتقع في ثلاثة اماكن مختلفة، وجميعها تنتج نفس الســـلعة، وان منتوج المصـــــانع الثلاثة يســـتوعب من قبل اربعة زبائن كبار (DESTINATIONS) هم: D_4,D_3,D_2,D_1 وان اي مصــنع من المصــانع الثلاثة يمكنه تســويق انتاجه الى اكثر من مستهلك في آن واحد، وهذا يمكن توضيحه في الرسم التالي:



كميـات العرض (Supply) في المصـــــانع الثلاثـة هي 30,50,40 على التوالي، وكميـات الطلـب (Demand) في مراكز الاستهلاك هي 30,40,30,20 على التوالي، وايضا تكلفة شحن الوحدة الانتاجية من مراكز الانتاج (ORIGINS) الى مراكز الاستهلاك (DESTINATIONS) هي كما يلي:

من المصنع O_1 الى المستهلكين D_1 , D_2 , D_3 , D_4 هي 5,9,4,12 على التوالي

من المصنع O_2 الى المستهلكين D_1 , D_2 , D_3 , D_4 هي 6,6,1,8 على التوالي

من المصنع O_3 الى المستهلكين D_1 , D_2 , D_3 , D_4 هي 7,4,12,1على التوالي

كميات العرض والطلب وتكلفة النقل مبينة في الجدول التالي:

Destinations / Origins	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
O_1	12 X_{11}	4 X_{12}	9 X_{13}	5 X_{14}	40
O_2	8 X_{21}	1 X_{22}	6 X_{23}	6 X_{24}	50
O_3	1 X_{31}	12 X_{32}	4 X_{33}	7 X_{34}	30
الطلب	20	30	40	30	

المشكلة هي في اختيار نمط نقل خاص، اي هي تحديد الكميات

$X_{11} , X_{12} , X_{13} , X_{14}$ التي يجب شحنها من O_1 الى D_1 , D_2 , D_3 , D_4

$X_{21} , X_{22} , X_{23} , X_{24}$ التي يجب شحنها من O_2 الى D_1 , D_2 , D_3 , D_4

$X_{31} , X_{32} , X_{33} , X_{34}$ التي يجب شحنها من O_3 الى D_1 , D_2 , D_3 , D_4

والتي تحقق الرغبات باقل تكلفة ممكنة

يصبح النموذج الرياضي على الشكل التالي:

تحديد قيم:

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}$

$X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}$

$X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{34}$

التي تصغر مجمل التكاليف، (اي التي تجعل التكلفة اقل مايمكن)

$$f(x) = 12X_{11} + 4X_{12} + 9X_{13} + 5X_{14} + 8X_{21} + X_{22} + 6X_{23} + 6X_{24} + X_{31} + 12X_{32} + 4X_{33} + 7X_{34}$$

بشرط

$$\begin{aligned}
&X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 40\\
&X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 50\\
&X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 30\\
&X_{11} + X_{21} + X_{31} = 20\\
&X_{12} + X_{22} + X_{32} = 30\\
&X_{13} + X_{23} + X_{33} = 40\\
&X_{14} + X_{24} \qquad X_{34} = 30
\end{aligned}$$

$X_{11} \geq 0, X_{12} \geq 0, X_{13} \geq 0, X_{14} \geq 0$

$X_{21} \geq 0, X_{22} \geq 0, X_{23} \geq 0, X_{24} \geq 0$

$X_{31} \geq 0, X_{32} \geq 0, X_{33} \geq 0, X_{34} \geq 0$

تعميم المشكلة

دع:

n = عدد المستهلكين (Destinations)

m = عدد المصانع (Origins)

j = المستهلك (j=1, 2,..., n)

i = المصنع $(i=1, 2,...,m)$

D_j = المطلوب من المستهلك j

S_i = المعروض من المصنع i

C_{ij} = تكلفة الشحن من المصنع i الى المستهلك j

X_{ij} = كمية المشحون من السلعة من المصنع i الى المستهلك j (هذه هي متغيرات القرار)

وهذه كلها يمكن تضمينها في الجدول التالي:

Destination / Origins	1	…	j	…	n	العرض
1	C_{11} (X_{11})	…	C_{1j} (X_{1j})	…	C_{1n} (X_{In})	S_1
. .	. .	… …	. .	… …	. .	. .
i	C_{i1} (X_{i1})	…	C_{ij} (X_{ij})	…	C_{in} (X_{in})	S_i
. .	. .	… …	. .	… …	. .	. .
m	C_{m1} (X_{m1})	…	C_{mj} (X_{mj})	…	C_{mm} (x_{mn})	S_m
الطلب	D_1	…	D_j	…	D_n	

الان المشكلة هي :

ماهي قيم X_{ij} التي تصغر تكاليف الشحن الى اقل مايمكن، اي رياضيا:

اوجد قيم X_{ij} $\begin{matrix}(i=1,2,...,m)\\(j=1,2,...,n)\end{matrix}$ التي تصغر تكاليف الشحن الى اقل مايمكن:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, X_{ij}$$

بشرط ان

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{X_{ij}} = \boldsymbol{S_i}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j$$

وان $X_{ij} \geq 0$

وبدون ان يفقد التعميم معناه نستطيع ان نفترض ان:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

4.4 تمارين الفصل الرابع / صياغة نماذج البرمجة الخطية

كون النموذج الرياضي لكل من المسائل التالية:

1. يمتلك مزارع مائة فدان، يريد ان يزرع جزءا منها بالقمح وجزءا آخر بالبطاطا، ومعطيات المسألة هي كالاتي:

تكاليف الزراعة بالدينار لكل فدان من القمح والبطاطا هي 20 و10 على التوالي، ايام العمل لكل فدان من القمح والبطاطا هي 4 و1 على التوالي، راس مال المزارع 1100 دينار وبامكانه تمضية 160 يوما للعمل في الزراعة، والسؤال الان هو كيف يقسم المزارع الارض، بحيث يكون ربحه الكلي اكبر ما يمكن اذا كان الربح الصافي بالدينار لكل فدان قمح 120 ولكل فدان بطاطا 40؟

2. ينتج مصنع نوعين من السلع A وB ومعطيات المسألة كالتالي:

تكاليف انتاج السلعة A من الخامات وساعات التشغيل واستهلاك الالات هي على التوالي: 5،3،3

وتكاليف انتاج السلعة B من الخامات وساعات التشغيل واستهلاك الالات هي على التوالي: 4،8،1

الحد الاقصى المسموح به للمواد الخام وساعات التشغيل واستهلاك الالات هو: 100،172،53 على التوالي.

ربح الوحدة من السلعة A هو 1

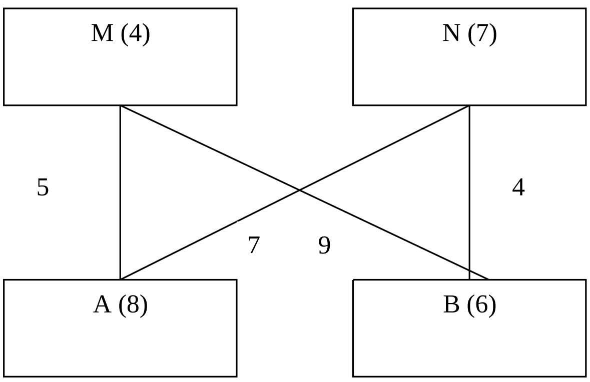
ربح الوحدة من السلعة B هو 2

والسؤال هو ماهي الكميات الواجب انتاجها من كل سلعة كي يحقق المصنع اكبر ربح ممكن؟

3. مصـــنع للعب الاطفال يصـــنع نموذجين من القوارب البلاســتيكية A و B، كل واحد منها يمر بمرحلتين صـــناعيتين II,I، القارب الواحد من النوع A يحتاج الى ســاعتين في المرحلة الاولى ومثلها في المرحلة الثانية، والقارب الواحد من النوع B يحتاج الى ســاعة في المرحلة الاولى و 3 ســـاعات في المرحلة الثانية. عدد ســـاعات العمل المتوفرة في المرحلة الاولى لاتزيد عن 20 ساعة، وفي المرحلة الثانية لاتزيد عن 30 ساعة،

اذا كان ربح القارب من النوع الاول 10، ومن النوع الثاني 20، فماهو الحل الامثل للحصـــول على اكبر ربح ممكن؟ اي ماهي الكميات الواجب انتاجها من كل نوع للحصـــول على اكبر ربح ممكن؟

4. تمتلك شـــركة نقل جراجين A وبه 8 لوريات، B وبه 6 لوريات، وتريد الشـــركة تغطية طلبات العميلين M و N، ويحتاج الاول الى 4 لوريات والثاني الى 7 لوريات، ويبين الشـــكل مواقع كل من الجراجين والعميلين والمســافات بينهما بالكيلومترات، وهدف الشـركة الان هو تحديد عدد اللوريات التي تغادر كل جراج في اتجاه كل من العميلين بحيث يكون اســـتهلاك الوقود اقل مايمكن.



5. يحتاج الجسم البشري يوميا الى الكميات الاتية على الاقل من الفيتامينات:

140 mg Vitamin V
300 mg Vitamin X
270 mg Vitamin Y
300 mg Vitamin Z

نفرض ان شـخصـا ما يريد ان يتغذى على نوعين فقط من الطعام B,A، تحتوي كل 100 غراما من كل منها على كميات من الفيتامينات المطلوبة كالاتي:

الفيتامين	100 غرام من A	100 غرام من B
V	20	5
X	25	12
Y	15	15
Z	10	30

المطلوب تعيين كمية الطعام التي يتناولها من كل نوع من النوعين، بحيث تكون التكاليف اقل ما يمكن، اذا علم ان ثمن النوع B هو ضعف ثمن النوع A.

6. قررت احدى شـركات الادوية ان تنتج نوعين من الادوية التي يسـتخدم في انتاجها المادتين A وB، وهي سـتقوم بتوزيع الادوية في صـناديق تحتوي على زجاجات الدواء، فاذا كان انتاج الصـندوق الواحد من الدواء الاول يحتاج الى 5 لترات من المادة A ومثلها من المادة B، بينما يحتاج انتاج الصـندوق الواحد من الدواء الثاني الى 3 لترات من A و11 لتر من B، وكان لدى الشـركة 30 لتراً من A و55 لترا من B، وقررت الشـركة بان لا تنتج اكثر من 4 صـناديق من الدواء الثاني، فاذا كان ربح الصـندوق الواحد من الدواء الاول 30 دولارا و من الدواء الثاني 40 دولارا، **فكم صندوقا من كل نوع على الشركة ان تنتج حتى تحقق اكبر ربح ممكن؟**.

7. تقوم احدى الشـــركات بانتاج نوعين من المواد الكيمياوية هما X و Y، يكلف انتاج اللتر الواحد من X دولارين، بينما يكلف انتاج اللتر الواحد من Y ثلاث دولارات، ومطلوب من الشـــركة ان تنتج خلال الاســـبوع القادم على الاقل 6 لتر من X و 2 لتر من Y، لكن هناك نقص في احد المواد الاولية الضرورية لصناعة هذين النوعيين، ولدى الشركة منه فقط 30 غراما.

كل لتر من X يحتاج الى 3 غرامات من هذه المادة، وكل لتر من Y يحتاج الى 5 غرامات منها،

كم لتر من كل نوع على الشركة ان تنتج بحيث تجعل تكلفتها اقل ما يمكن.

8. تريد احدى شركات الاعلان ان تقرر كيف يمكنها الوصول الى اكبر عدد ممكن من الناس ممن يصلهم الاعلان، وذلك ضمن ميزانية محددة للاعلان،

فاذا كان لديها 4 وسائل للاعلان وهي التلفزة والراديو والمجلات والصحف

وحصل فريق البحث الميداني لدى الشركة على البيانات المعطاة في الجدول التالي:

	التلفزة	الراديو	المجلات	الصحف
تكلفة وحدة الاعلان $	60 000	25000	12000	20 000
عدد الذكور الذين يصلهم الاعلان	200 000	110 000	50 000	80 000
عدد الاناث اللواتي يصلهن الاعلان	150 000	120 000	70 000	85 000

الشركة لاتريد ان تصرف اكثر من 700 000 دولار في عمليات الاعلان،

المعطيات الاخرى:

i. يجب ان يكون عدد الذكور الذين يصلهم الاعلان على الاقل 000 1800

ii. يجب ان يكون عدد الاناث الذين يصلهم الاعلان على الاقل 000 1500

iii. على الاقل 4 وحدات اعلان يجب ان يعلن في التلفزة

iv. ليس اكثر من 10 وحدات اعلان يجب ان يعلن في المجلات

v. عدد وحدات الاعلان في كل من الراديو والصحف يجب ان يكون مابين 2 و15 وحدة

اذا كان هدف الشركة هو تحديد عدد وحدات الاعلان في كل وسيلة اعلان حتى تحقق الوصول الى اكبر عدد ممكن من الناس (الزبائن)، كون النموذج الرياضي لهذه المسألة.

5.4 حل تمارين الفصل الرابع / صياغة نماذج البرمجة الخطية

1. يمكن تنظيم جميع المعلومات المعطاة في المسألة بالجدول التالي:

	بطاطا	قمح	الكمية المسموح بها
تكاليف الزراعة بالدينار لكل فدان	10	20	1100
ايام العمل لكل فدان	1	4	160
الربح الصافي بالدينار لكل فدان	40	120	

الان يمكننا وضع المشكلة بالطريقة التالية:

تحديد المساحة التي ستزرع بالقمح وتلك التي ستزرع بالبطاطا بحيث لاتزيد التكاليف عن رأسمال المزارع (1100) ولاتزيد ايام العمل عن امكانية المزارع (160 يوما) وبحيث يتم تحقيق اكبر ربح ممكن.

لصياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة دع:

X_1 تمثل عدد الفدانات التي ستزرع بالبطاطا

X_2 تمثل عدد الفدانات التي ستزرع بالقمح

وبهذا فأن السطرين الاول والثاني من الجدول يعطيان المتباينتين:

$$10X_1 + 20X_2 \leq 1100$$
$$X_1 + 4X_2 \leq 160$$

كما ان المساحة المزروعة يجب ان تكون 100 فدان على الاكثر:

$$X_1 + X_2 \leq 100$$

وبما ان x_2،x_1 عبارة عن مساحة فأن:

$$X_1 \geq 0 \text{،} X_2 \geq 0$$

من هذه الشـــروط يتضـــح ان المجهولين x_1، x_2 تقيدان بخمس متباينات كما ان الرغبة في جعل الربح اكبر مايمكن تعني ان:

$$40X_1 + 120X_2 = Max$$

الربح هذا دالة في المتغيرات x_j^s وتكتب عادة على صورة $f(x)$ اي :

$$f(x) = 40X_1 + 120X_2$$

وبهذا يصبح النموذج الرياضي على الصورة التالية:

ماهي قيم x_1 وx_2 التي تجعل دالة الهدف (الربح) اكبر مايمكن:

$$f(x) = 40X_1 + 120X_2$$

بشرط ان:

$$10X_1 + 20X_2 \leq 1100$$
$$X_1 + 4X_2 \leq 160$$
$$X_1 + X_2 \leq 100$$

وان $X_1 \geq 0$ ،$X_2 \geq 0$

2. نجمع المعطيات كلها في الجدول التالي:

السلعة	A	B	المسموح به
خامات	5	4	100
ساعات تشغيل	3	8	172
استهلاك الات	3	1	53
ربح الوحدة الواحدة	**1**	**2**	

لصياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة دع:

X_1 تمثل الكمية المنتجة من A

X_2 تمثل الكمية المنتجة من B

وبهذا فان القيود المبينة في الجدول تصبح على الصورة التالية:

$$5X_1 + 4X_2 \leq 100$$
$$3X_1 + 8X_2 \leq 100$$
$$3X_1 + X_2 \leq 53$$

وبما ان X_1 ، X_2 كميات فأن:

$$X_1 \geq 0 \text{ ،} X_2 \geq 0$$

جعل الربح اكبر مايمكن يعني جعل الدالة:

$$f(x) = X_1 + 2X_2 = Max.$$

وبهذا يصبح النموذج الرياضي على الصورة التالية:

ماهي قيم X_1، X_2 التي تجعل دالة الهدف(الربح) $f(x) = x_1 + 2x_2$ اكبر مايمكن؟

بشرط:

$$5X_1 + 4X_2 \leq 100$$
$$3X_1 + 8X_2 \leq 172$$
$$3X_1 + X_2 \leq 53$$

و $X_1 \geq 0$ ،$X_2 \geq 0$

3. يمكننا جمع المعطيات الواردة في المسألة بالجدول التالي:

النوع / المرحلة	A	B	الساعات المتوفرة
I	2	1	20
II	2	3	30
ربح الوحدة	**10**	**20**	

لصياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة دع:

X_1 تمثل الكميات الواجب انتاجها من النوع الاول A

X_2 تمثل الكميات الواجب انتاجها من النوع الثاني B

وبهذا فاننا نستطيع ترجمة جدول البيانات السابقة الى القيود التالية:

$$2X_1 + X_2 \leq 20$$
$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$

و $X_1 \geq 0$ ،$X_2 \geq 0$ لانها كميات.

جعل الربح اكبر مايمكن يعني تعظيم الدالة

$$f(x) = 10X_1 + 20X_2$$

وبهذا يصبح النموذج الرياضي على الصورة التالية:

ماهي قيم X_1 ، X_2 التي تعظم الدالة

$$f(x) = 10X_1 + 20X_2$$

بشرط:

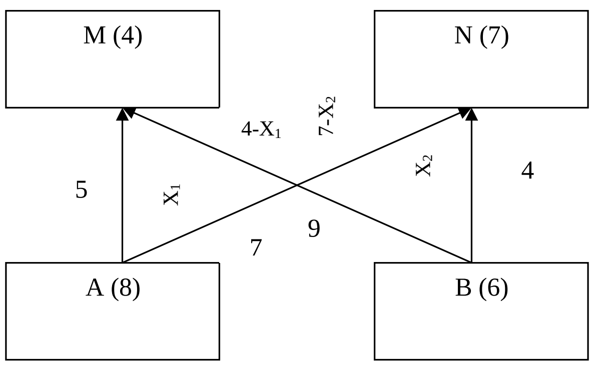
$$2X_1 + X_2 \leq 20$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$

و $X_2 \geq 0$، $X_1 \geq 0$

4. لتكوين النموذج الرياضي دع:

X1 لوري تغادر الجراج A متجهة الى العميل M وبناء على ذلك فأن باقي متطلبات هذا العميل وهي ($4-X_1$) لوري سـوف تصـله من الجراج B، وبالمثل اذا غادر X_2 لوري الجراج B متجهة الى العميل N فأن ($7-X_2$) لوري سوف تأتيه من الجراج A لاستيفاء حاجته من اللوريات.



وهذا التوزيع يخضع للقيود المنطقية التالية:

اولا: عدد اللوريات التي تصل كل عميل من كلا الجراجين يجب ان يكون اكبر من او يساوي الصفر اي ان:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \geq 0{,}4 - X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0{,}7 - X_2 \geq 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (1)$$

ثانيا: العدد الكلي للوريات التي تغادر كل جراج يجب ان لاتزيد عما به من اللوريات اي ان:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + (7 - X_2) \leq 8inA \\ X_2 + (4 - X_1) \leq 6inB \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

بضرب المتباينات (1) في (−) تصبح:

$$X_1 \leq 4$$
$$X_2 \leq 7$$

وتصبح القيود(2) بعد تجميع الحدود على الصورة التالية:

$$X_1 - X_2 \leq 1$$
$$-X_1 + X_2 \leq 2$$

فاذا اعتبرنا اسـتهلاك الوقود يتناسـب مع المســافة التي يقطعها كل لوري فأن الدالة التي تمثل اسـتهلاك الوقود تكون:

$$5X_1 + 9(4 - X_1) + 7(7 - X_2) + 4X_2$$

أو: $85 - (4X_1 + 3X_2)$

والتي يجب جعلها اقل مايمكن:

وبهذا يصبح النموذج الرياضي على الصورة التالية:

تحديد قيم X_1،X_2 التي تجعل الدالة:

$$f(x) = 85 - (4X_1 + 3X_2)$$

اقل ما يمكن بشرط:

$$X_1 \leq 4$$
$$X_2 \leq 7$$
$$X_1 - X_2 \leq 1$$
$$-X_1 + X_2 \leq 2$$

و: $X_2 \geq 0$ ،$X_1 \geq 0$

5. نستطيع ان نجمع جميع المعطيات في الجدول التالي:

النوع / الفيتامينات	100 غرام A	100 غرام B	الحد الادنى المطلوب
V	20	5	140
X	25	12	300
Y	15	15	270
Z	10	30	300
التكلفة لكل 100 غرام	1	2	

نفرض ان الكمية المطلوبة من النوعِ **A** هي x_1 من مئات الغرامات ومن النوع B هي X_2 مئات غرامات،

فتتعين قيود المسألة من واقع الجدول التالي:

$$20X_1 + 5X_2 \geq 140$$
$$25X_1 + 12X_2 \geq 300$$
$$15X_1 + 15X_2 \geq 270$$
$$10X_1 + 30X_2 \geq 300$$

$$X_1 \geq 0 \text{ ، } X_2 \geq 0$$

وتتناسب الدالة:

$$f(x) = X_1 + 2X_2$$

مع تكاليف الطعام المراد جعلها نهاية صغرى، وبهذا يصبح النموذج الرياضي على الصورة التالية:

تحديد قيم X_1 ، X_2 التي تجعل الدالة $f(x) = X_1 + 2X_2$ اصغر مايمكن بشرط:

$$20X_1 + 5X_2 \geq 140$$
$$25X_1 + 12X_2 \geq 300$$
$$15X_1 + 15X_2 \geq 270$$
$$10X_1 + 30X_2 \geq 300$$

و: $X_2 \geq 0$ ، $6X_1 \geq 0$

6. يمكن تنظيم المعلومات المعطاة في المسألة بالجدول التالي:

الدواء / المادة	1	2	الكميات المتاحة
A	5	3	30
B	5	11	55
ربح الصندوق	30	40	

لتكن X_1 هي عدد الصناديق الواجب انتاجها من النوع الاول

X_2 هي عدد الصناديق الواجب انتاجها من النوع الثاني

فيكون النموذج الرياضي هو:

تحديد قيم X_1 ، X_2 التي تعظم دالة الهدف

$$f(x) = 30X_1 + 40X_2$$

بشرط ان:

$$5X_1 + 3X_2 \leq 30$$
$$5X_1 + 11X_2 \leq 55$$
$$X_2 \leq 4$$

وأن: $X_1 \geq 0$ ،$X_2 \geq 0$

7. دع X_1 عدد اللترات المنتجة من X

X_2 عدد اللترات المنتجة من Y

يمكننا ان نجمع البيانات المعطاة عن المسألة في الجدول التالي:

النوع / المادة	**X**	**Y**	**الكميات المتاحة**
المادة الاولية	3	5	30
تكلفة اللتر	2	3	

يصبح النموذج الرياضي هو:

تحديد قيم X_1 ، X_2 التي تصغر دالة الهدف(التكلفة):

$$f(x) = 2X_1 + 3X_2$$

بشرط ان:

$$3X_1 + 5X_2 \leq 30$$
$$X_1 \geq 6$$
$$X_2 \geq 2$$

وان: $X_1 \geq 0$ ،$X_2 \geq 0$

.8

	التلفزة	الراديو	المجلات	الصحف
تكلفة وحدة الاعلان $	60 000	25000	12000	20 000
عدد الذكور الذين يصلهم الاعلان	200 000	110 000	50 000	80 000
عدد الاناث اللواتي يصلهن الاعلان	150 000	120 000	70 000	85 000

دع:

X_1 عدد وحدات التلفزة

X_2 عدد وحدات الراديو

X_3 عدد وحدات الصحف

X_4 عدد وحدات المجلات

يصبح النموذج الرياضي هو :

تحديد قيم X_1، X_2 ، X_3، X_4 التي تعظم دالة الهدف(بالالاف)

$$f(x) = 350X_1 + 230X_2 + 165X_3 + 120X_4$$

بشرط أن:

$$\begin{aligned}
60X_1 + 25X_2 + 20X_3 + 12X_4 &\leq 700 \\
200X_1 + 110X_2 + 800X_3 + 50X_4 &\geq 1800 \\
150X_1 + 120X_2 + 85X_3 + 70X_4 &\geq 1500 \\
X_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &\geq 4 \\
X_4 &\leq 10
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix} X_2 \geq 2 \\ X_2 \leq 15 \end{matrix}\right| 2 \leq X_2 \leq 15$$

$$\left.\begin{matrix} X_3 \geq 2 \\ X_3 \leq 15 \end{matrix}\right| 2 \leq X_3 \leq 15$$

و:

$X_1 \geq 0$ ،$X_2 \geq 0$

$X_3 \geq 0$ ،$X_4 \geq 0$

الفصل الخامس

الحل البياني لمسائل البرمجة الخطية

Graphical solution to linear programming problems

1.5 حل مسائل البرمجة الخطية بيانيا

عرفنا من الفصل السابق ان اي مشكلة من مشاكل البرمجة الخطية تتكون من ثلاثة اجزاء هي:

1. دالة هدف خطية يراد تعظيمها او تصغيرها.
2. مجموعة من القيود الخطية على شـــكل متباينات من نوع $\leq$ او $\geq$ او = او خليط من هذه الانواع.
3. قيود غير سالبة من نوع $X_J \geq 0$

لحل مسـائل البرمجة الخطية بيانيا نحتاج الى تمثيل الاقسـام الثلاثة اعلاه في شـكل بياني واحد، وهذا يمكن توضيحه بسهولة في فراغ من بعدين، للتوضيح دعنا نأخذ مسألة برمجة خطية بسيطة مكونة من متغيرين (مجهولين) فقط.

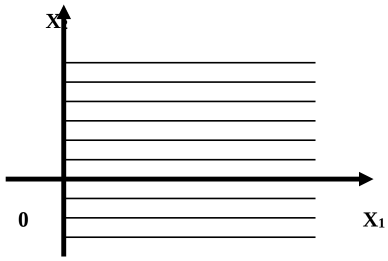
مثال 1: اوجد قيم X_1 ، X_2 التي تعظم دالة الهدف

$$f(x) = 3X_1 + 5X_2$$

بشرط:

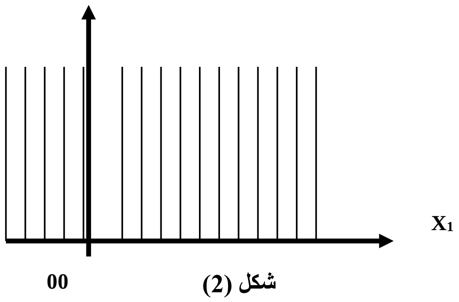
$$\begin{aligned}
X_1 \quad\quad & \leq 4 \\
X_2 & \leq 6 \\
3X_1 + 2X_2 & \leq 18 \\
X_1 & \geq 0 \\
X_2 & \geq 0
\end{aligned}$$

خذ $X_1 \geq 0$
هذا يمثل المنطقة المظللة على يمين محور كل نقاط (X_1,X_2) الواقعة في المنطقة المظللة وتلك الواقعـة على المحور X_2 تحقق



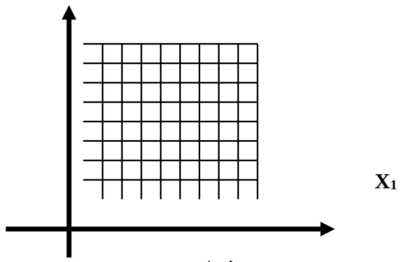
شكل (1)

وبنفس الاســـلوب فـأن جميع نقـاط (X_1,X_2) الواقعـة في المنطقـة المظللـة وتلك الواقعة على المحور X_1 في شــكل (2) تحقق شرط $X_1 \geq 0$



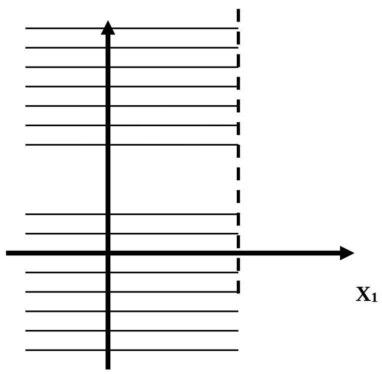
شكل (2)

الان لو اخذنا الشـرطين معا $X_2 \geq 0$، $X_1 \geq 0$ فاننا نحصل على المنطقة المظللة في الشكل 3، فتكون جميع النقاط الواقعة في المنطقة المظللة وعلى المحورين X_1،X_2 تحقق الشــــرطين غير السالبين.



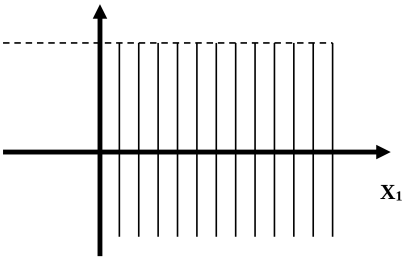
شكل (3)

بعد ذلك دعنا نأخذ القيود الهيكلية خذ $x1 \leq 4$ وهذا يمثل المنطقة على يســار الخط المســتقيم $X1 = 4$ كمـا هو في شـــكـل (4). جميع النقاط$(x1 , x2)$ الواقعة في المنطقة المظللة وعلى الخط $x1= 4$ تحقق الشرط $x1 \leq 4$.



شكل (4)

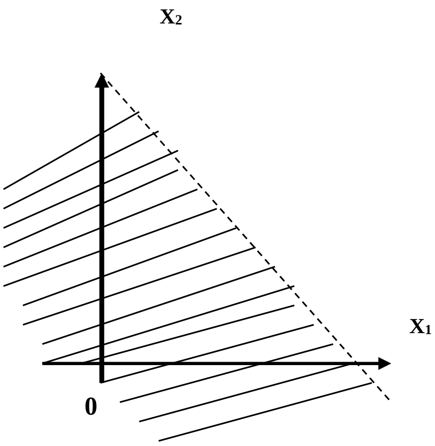
وبنفس الطريقة فان جميع النقاط($x1,x2$) الواقعة في المنطقة المظللة وعلى الخط $x2 = 6$ في شكل (5) تحقق الشرط $x2 \leq 6$.



شكل (5)

خذ القيد $3x_1 + 2x_2 = 18$ فان الخط المستقيم $3x_1 + 2x_2 = 18$ يقسم الشكل الى قسمين، المتباينة $3x_1 + 2x_2 < 18$ تمثل المنطقة المظللة والتي تتضمن نقطة الاصل (القسم الثاني يمثل بالمتباينة $3x_1 + 2x_2 > 18$).

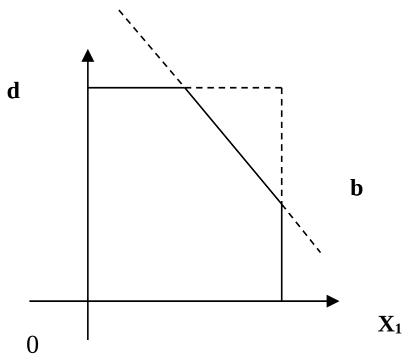
جميع النقاط (x_1,x_2) الواقعة في المنطقة المظللة وعلى المستقيم $3x_1 + 2x_2 = 18$ تحقق القيد(او الشرط) $3x_1 + 2x_2 \leq 18$



شكل (6)

الان اذا جمعنا جميع القيود الهيكلية وغير السالبة في شكل واحد فأننا نحصل على المضلع Oabcd شك (7). جميع النقاط داخل المضلع وعلى الخطوط المحيطة به تحقق القيود الهيكلية وغير السالبة، اي انها تحقق الشروط التالية:

$$\begin{aligned} X_1 \quad & \leq 4 \\ X_2 \quad & \leq 6 \\ 3X_1 + 2X_2 \quad & \leq 18 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$



شكل (7)

جميع هذه النقاط تدعى بمجموعة الحلول الممكنة للمســـألة، وهذه المجموعة تحتوي على عدد لا متناهي من الحلول الممكنة، والنقاط:

$$O = (x_1 = 0 \ , \ x_2 = 0)$$
$$a = (x_1 = 4 \ , \ x_2 = 0)$$
$$b = (x_1 = 4 \ , \ x_2 = 3)$$
$$c = (x_1 = 2 \ , \ x_2 = 6)$$
$$d = (x_1 = 0 \ , \ x_2 = 6)$$

هي زوايا (او اركان) المضـــلع Oabcd، وتدعى بالحلول الحدية او الحلول الاســـاســـية الممكنة، والحل الامثل هو دائما احد الحلول الاساسية الممكنة.

لمعرفة اي نقطة من مجموعة الحلول الممكنة هي الحل الامثل او هي التي تحقق دالة الهدف هناك طريقتان هما:

الطريقة الاولى:

نقوم بتمثيل دالة الهدف في الشكل البياني، لكنه من الواضـح ان دالة الهدف ليسـت معادلة يمكن تمثيلها بيانيا، ولهذا يكتفى عادة بتحديد اتجاه دالة الهدف، ولتحديد اتجاه دالة الهدف نعطيها اي قيمة اكبر من او تساوي الصفر، وعادة تعطى القيمة صفر كي يتم الاستفادة من القاعدة الجبرية التي تقول بان بعد اي نقطة (x,y) عن المستقيم ax + by + c = o يعطى من العلاقة:

$$P = \left| \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

حيث P هي بعد النقطة عن المستقيم (اي عن الدالة)، اي انه يتناسب مع المقدار $|ax + by + c|$

وعملية ايجاد النقطة على المضـــــلع (بما فيه حدوده) التي تكون عندها الدالة اكبر مايمكن تؤول الى البحث عن النقطة التي تبعد عن المســـتقيم الممثل للدالة اكبر بعد. كذلك لايجاد النهاية الصـــغرى للدالة نبحث عن النقطة في المضلع التي تكون اقرب مايمكن من المستقيم.

وهكذا نسـتطيع القول بان الطريقة الاولى لتعيين نقطتي النهاية الصـغرى والعظمى بيانيا تتمثل في رسـم المضلع حسب المتباينات المعطاة، وكذلك الخط المستقيم الذي تـأخذ عليه الدالة الخطية القيمة صفر كما في شـكل (8) ثم نحرك هذا المسـتقيم موازيا لنفســه في اتجاه المضــلع حتى نقابل اقرب ركن فيكون هو نقطة النهاية الصغرى، ثم نكمل عملية تحريك المستقيم موازيا لنفسه حتى نصل الى ابعد ركن فيكون هو نقطة النهاية العظمى.

الطريقة الثانية:

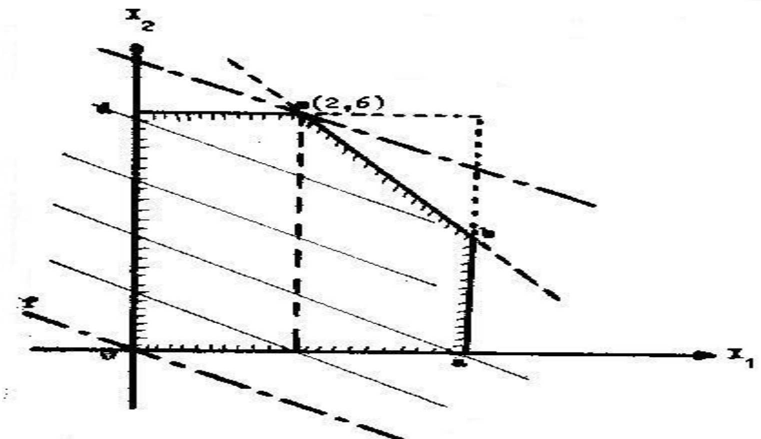
اما الطريقة الثانية لتحديد هاتين النهايتين فهي جبرية وتتمثل في تعيين اركان المضــلع بايجاد نقط تقاطع اضـلاعه مثنى مثنى اي بتحديد النقط الحدية(نقط الحلول الاسـاسـية الممكنة) ثم نعوض هذه الاركان كل بدوره في دالـة الهدف الخطيـة والنقطـة(او الركن) التي تحقق اقل قيمـة للدالـة تكون هي نقطـة النهـايـة الصــــغرى وتلك التي تحقق اكبر قيمة للدالة تكون هي الحل الامثل في تعظيم الدالة اي تكون هي نقطة النهاية العظمى.

ففي مثالنا وبناء على هذه القواعد، فلمعرفة اي ركن من اركان المضــلع في الشـكل(8) يحقق اعظم قيمة للدالة $3x_1 + 5x_2$ فاننا نقوم برسم المسـتقيم $3x_1 + 5x_2 = 0$ المار بنقطة الاصـل كما في الشكل(8) ثم نقوم بتحريكه موازيا لنفســـه حتى نصـــل الى ابعد ركن في المضـــلع وهو الركن c وتكون عنده النهاية العظمى.

$$C = (x_1 = 2, x_2 = 6)$$

نعوض قيمتها في الدالة فتكون النهاية العظمى للدالة

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2$$
$$= 3(2) + 5(6)$$
$$= 36$$



شكل (5)

مثال 2:

ماهي قيم x_1، x_2 التي تصغر الدالة $f(x) = x_1 + 4x_2$

بشرط ان:

$$x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$2x_1 - x_2 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

الحـل:

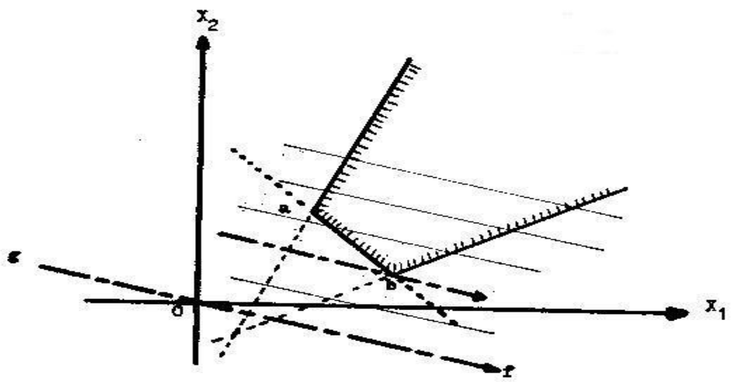
نمثل متباينات القيود الهيكلية وغير الســالبة في الرســم البياني الموضـــح في الشــكل (9) فتتحدد لدينا مجموعة الحلول الاســاســية الممكنة، ثم نرســم الخط المســتقيم الذي تأخذ عليه الدالة $f(x) = x_1 + 4x_2$ القيمة صــفر ونقوم بتحريك هذا المســتقيم موازيا لنفســه باتجاه المضــلع فتكون النقطة b هي اول نقطة يلامسها هذا المستقيم وعندها تكون قيمة الدالة في نهايتها الصغرى وهو المطلوب:

$$b = \left(x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore f(x) = x_1 + 4x_2$$

$$= {}^{10}/_{3} + 4({}^{2}/_{3})$$

$$= 6$$



شكل (9)

ملاحظة:

لو كان المطلوب في مثالنا هذا القيمة العظمى للدالة بدلا من القيمة (النهاية) الصــغرى، تكون أخر نقطة في المضلع يلامسها المستقيم fg غير موجودة، وبهذا يكون الحل غير محدود.

ان الطريقة البيانية في حل مســـائل البرمجة الخطية تكون ممكنة فقط في الحالات التي يكون فيها ثلاث متغيرات او اقل، لكنها تعطينا صورة او فكرة على ان مسائل البرمجة الخطية تحتوي عادة على:

1. عدد لامحدود من الحلول التي تحقق القيود الهيكلية والقيود غير الســالبة، وهي تشــكل مضــلع وتعرف باسم مجموعة **الحلول الملائمة**.
2. ضـــمن مجموعة الحلول الممكنة هناك عدد محدود من الحلول وهي نقط تقاطع كل قيدين معا وتحقق باقي الشروط، وهذه الحلول معروفة باسم الحلول الحدية او **الحلول الاساسية**.
3. ضـمن هذه الحلول الاسـاسـية الممكنة يوجد هناك حل (او عدة حلول) تعظم او تصـغر الدالة وتعرف باسم **الحل الامثل**.

2.5 تمارين الفصل الخامس / الحل البياني لمسائل البرمجة الخطية

1. ماهي قيم x_1، x_2 التي تجعل الدالة التالية اصغر مايمكن $f(x) = 3x_1 - x_2$

بشرط ان:

$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_2 \leq 2$$

و $x_1 \geq 0$ ، $x_2 \geq 0$

2. ماهي قيم x_1، x_2 التي تعظم الدالة $f(x) = 4x_1 - 2x_2$

بشرط ان:

$$-x_1 + x_2 \geq -6$$
$$x_1 - 4x_2 \leq 2$$
$$x_1 - 2x_2 \geq -4$$

وان $x_1 \geq 0$ ، $x_2 \geq 0$

3. ماهي قيم x_1، x_2 التي تعظم الدالة $f(x) = 3x_1 - 2x_2$

بشرط ان:

$$x_1 \leq 4$$
$$x_2 \leq 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

وان $x_1 \geq 0$ ،$x_2 \geq 0$

4. ماهي قيم x_1، x_2 التي تصغرالدالة $f(x) = 2x_1 + x_2$

بشرط ان:

$$3x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$x_1 + x_2 = 5$$

وان $x_1 \ge 0$ ،$x_2 \ge 0$

5. ماهي قيم x_1، x_2 التي تعظم الدالة

$$f(x) = 6x_1 - 4x_2$$

بشرط ان:

$$x_1 + 2x_2 = 8$$
$$2x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1 \quad = 4$$

وان $x_1 \ge 0$ ،$x_2 \ge 0$

6. اوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$\boldsymbol{f(x) = 3x_1 + x_2}$$

حول المضلع المحدب الذي تحدده المتباينات التالية:

$$x_1 - 4x_2 + 3 \le 0$$
$$x_1 + x_2 - 7 \le 0$$
$$3x_1 - 2x_2 - 1 \ge 0$$

&

$x_1 \ge 0$ ،$x_2 \ge 0$

7. اوجد النهايات الصغرى والعظمى للدالة $x + y$ حول المضلع المحدب المعين بالمتباينات الاتية:

$$x + 2y - 3 \geq 0$$
$$2x + y - 3 \geq 0$$
$$x \geq 0 \text{ ،} y \geq 0$$

8. اوجد القيمة العظمى للدالة $\boldsymbol{f(x) = 2.5x_1 + 2x_2}$

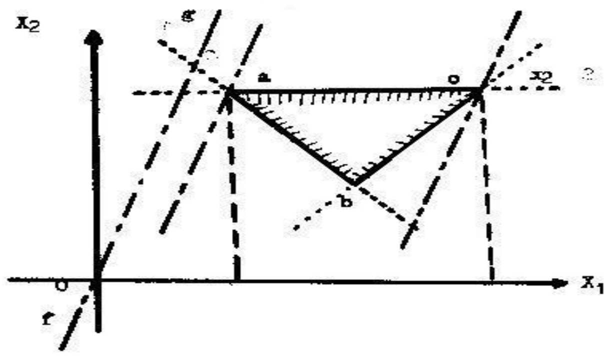
بشرط ان:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8000$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 9000$$

وان $x_1 \geq 0$ ،$x_2 \geq 0$

3.5 حل تمارين الفصل الخامس / الحل البياني لمسائل البرمجة الخطية

1. ان القيود غير السالبة تحدد ان المضلع المحدب المغلق يقع في القسم الموجب من الرسم:



القيد $x_1 + x_2 \geq 3$ ممثل بالمنطقة على يمين ab ولا تشتمل على نقطة الاصل.

القيد $x_1 + x_2 \leq 1$ ممثل بالمنطقة على يسار bc وتشتمل على نقطة الاصل.

القيد $x_2 \leq 2$ ممثل بالمنطقة تحت ac.

وبهذا فان القيود الهيكلية وغير السالبة ممثلة بالمنطقة الواقعة داخل المثلث abc وعلى اضلاعه، كما في الشكل اعلاه وهذه هي مجموعة الحلول الممكنة.

اما الحلول الاساسية الممكنة فهي ممثلة بالنقط:

$$a = (x_1 = 1, x_2 = 2)$$
$$b = (x_1 = 2, x_2 = 1)$$
$$c = (x_1 = 3, x_2 = 2)$$

اذا افترضـنا ان الدالة $f(x) = 0$ فانه يمكن تمثيلها بالمسـتقيم fg المار بنقطة الاصـل. دع fg يتحرك باتجاه المثلث وبشـكل او اتجاه مواز لنفســه فتكون اول نقطة من المثلث يلامســها وهي النقطة a تعطي اقل قيمة للدالة وبالتالي تحقق الحل الامثل:

وبتعويض قيم x_1 ، x_2 عند في الدالة تكون قيمة الدالة

$$f(x) = 3x_1 - x_2$$
$$= 3(1) - 1(2) = 1$$

الذي هو اقل قيمة ممكنة لدالة الهدف f(x).

ملاحظة:

لو كان المطلوب في الســؤال هو تعظيم الدالة فاننا نســتمر في تحريك المســتقيم fg موازيا لنفســه حتى يلامس آخر نقطة في المثلث وعندها تكون الدالة نهاية عظمى وفي سـؤالنا سـتكون النقطة c وتكون قيمة $x_1=3$, $x_2=2$ والدالة :

$$f(x) = 3(3) - 1(2)$$
$$= 7$$

والتي هي اكبر قيمة يمكن الحصول عليها لدالة الهدف.

2. في هذا الســؤال نرى ان الطرف الايمن لبعض القيود ســالبا وكي نطبق نفس الاجراءات المتبعة في السؤال السابق علينا ان نضرب طرفي المتباينات بـ(−) وتحويل > الى< و < الى > فالقيود:

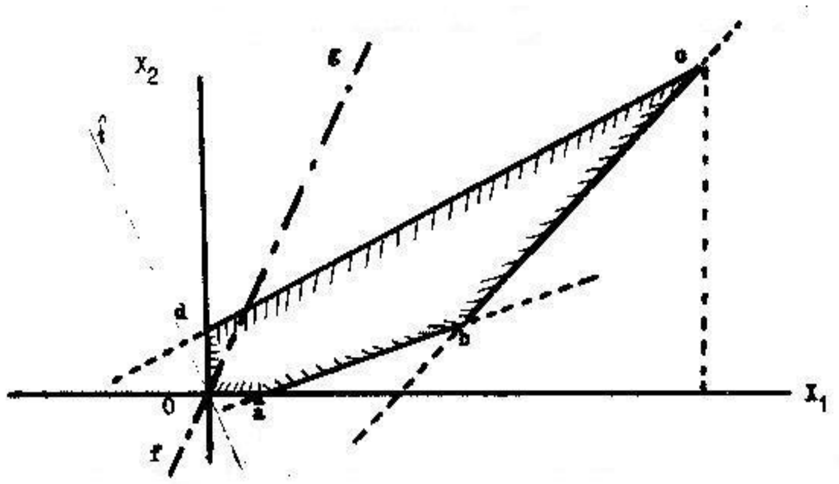
$$-x_1 + x_2 \geq -6$$
$$x_1 - 2x_2 \geq -4$$

تصبح:

$$x_1 - x_2 \leq 6$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

وتبقى باقي القيود كماهي.

وتكون مجموعة الحلول الممكنة ممثلة بالمضـــــلع المحدب المغلق oabcd واتجاه دالة الهدف ممثلة fg كما في الشكل التالي:



اذا حركنا المستقيم fg باتجاه المضلع وبشكل مواز لنفسه فان اخر نقطة من المضلع يلامسها هي النقطة c وعندها تكون الدالة نهاية عظمى ، ويكون الحل الامثل عند النقطةc.

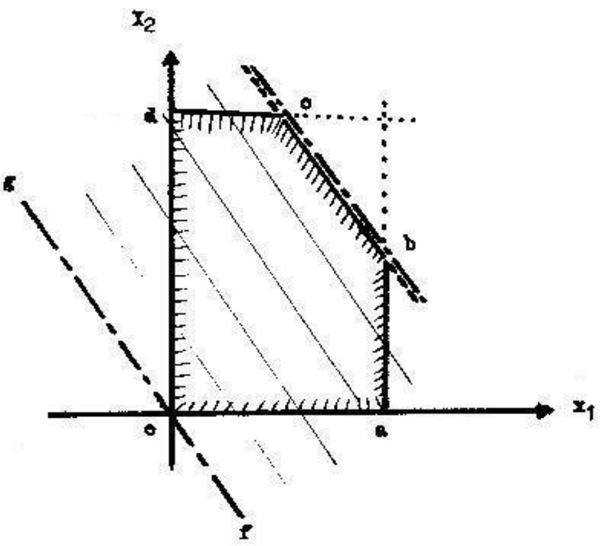
$$C = (x_1 = 16, x_2 = 10)$$

اي ان قيم x_2,x_1 التي تعظم الدالة هي 16،10 على التوالي وتكون قيمة الدالة:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x_1 + 2x_2 \\ &= 4(16) + 2(10) \\ &= 84 \end{aligned}$$

وهي اكبر قيمة يمكن الحصول عليها لدالة الهدف المعطاة.

3. في هذا السـؤال المضـلع oabcd يمثل مجموعة الحلول الممكنة وميل او اتجاه دالة الهدف هو نفس اتجاه القيد الثالث وهكذا يكون fg موازيا ل bc كما هو موضح في الشكل البياني التالي:

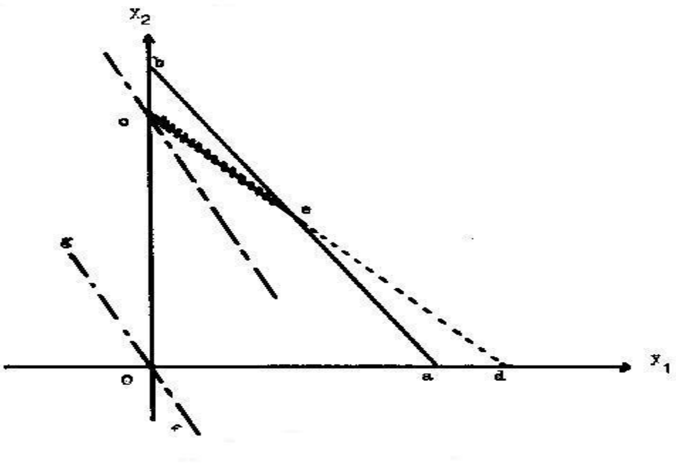


وتكون نتيجة ذلك ان اي نقطة تقع على المستقيم تكون نهاية عظمى للدالة وتكون نفس النهاية وهذا هو الحل الامثل لتعظيم الدالة. في هذه الحالة عندنا اكثر من نقطة تحقق الحل الامثل ومنها:

$$b = (x_1 = 4, x_2 = 3)$$
$$c = (x_1 = 2, x_2 = 6)$$

وكذلك ان نقطة تقع على bc تكون قيمة الدالة او النهاية العظمى للدالة عند ا ينقطة من هذه النقط تساوي 18.

4. نمثل القيود واتجاه دالة الهدف كما في الشكل التالي:



ان مجموعة الحلول الممكنة في هذا السـؤال هي جميع النقط الواقعة على الجزء ce والحلول الاسـاسـية (الحدية) هي الممثلة ب e,c.

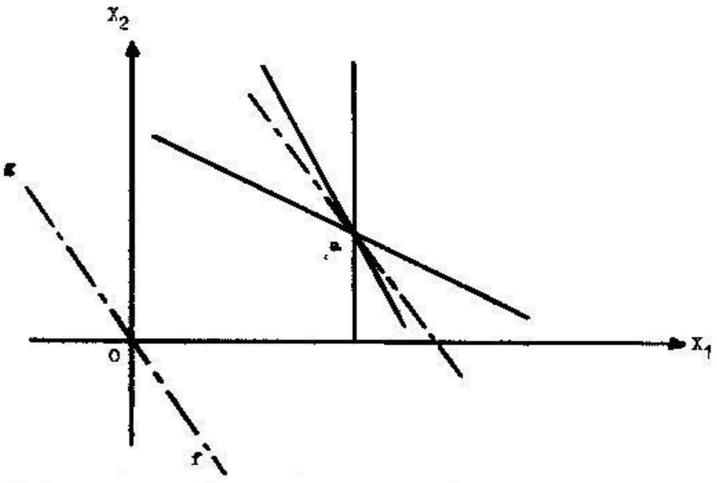
اذا حركنا المسـتقيم fg والذي يمثل اتجاه دالة الهدف نحو اليمين فان اول نقطة يلامسـها من الجزء ce هي النقطة c

وهكذا فان النقطة c=(x$_1$=0 , x$_2$=5)تعطي الحل الامثل وتكون قيمة الدالة عندها مساوية

$$f(x) = 2x_1 + x_2$$
$$= 2(0) + 1(5)$$
$$= 5$$

وهي اقل قيمة يمكن الحصول عليها لدالة الهدف وفق الشروط المعطاة.

5. نمثل جميع القيود الهيكيلية وغير السالبة في الشكل التالي :



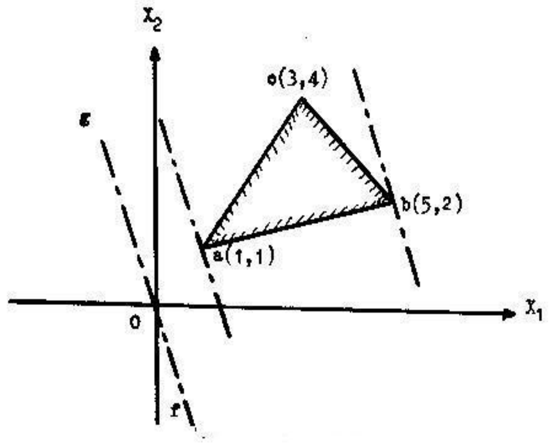
النقطة $a=(x_1=4, x_2=2)$ هي النقطة الوحيدة التي تحقق جميع القيود الهيكياية والقيود غير الســــالبة.

وهكذا فهي تمثل الحل الامثل وتكون قيمة الدالة عندها:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 6x_1 + 4x_2 \\
&= 6(4) + 4(2) \\
&= 32
\end{aligned}
$$

6. بتحويل المتباينات المعطاة الى متساويات نحصل على معادلات اضلاع المحدب وبرسمها يتعين المضلع المحدب المبين في الشكل التالي واركانه هي النقط $c(3,4),b(5,2),a(1,1)$. ثم نرسم المستقيم الممثل لدالة الهدف $3x_1 + x_2 = 0$ كما في الشكل ونحركه موازيا لنفسه، اول نقطة من المضلع يلامسها هذا المستقيم تكون النقطة $a(1,1)$ فتكون الدالة عندها نهاية صغرى وقيمتها=

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3(1) + 1(1) \\
&= 4
\end{aligned}
$$



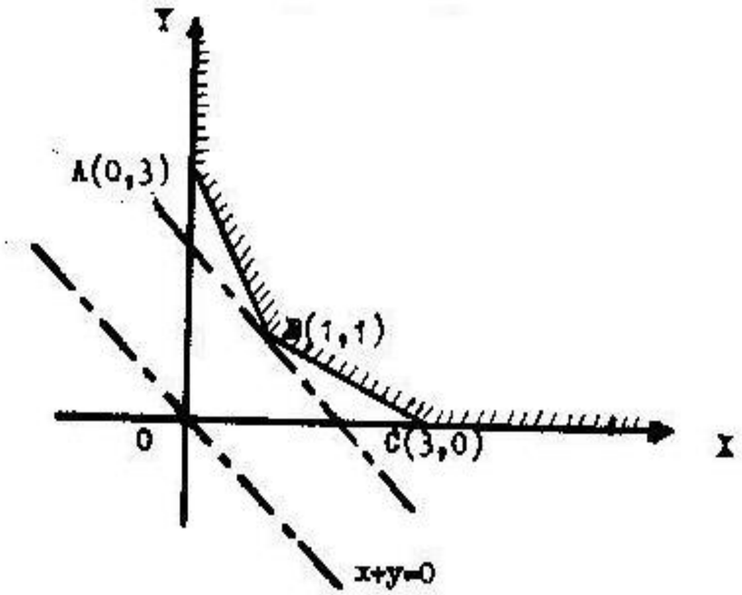
وبمقدارية التحريك نصل الى ابعد نقطة في المضلع يلامسها المستقيم وهي النقطة b(5,2) وتكون عندها النهاية العظمى وتكون قيمة الدالة =

$$f(x) = 3(5) + 1(2)$$
$$= 17$$

7. يبين الشكل التالي المضلع المحدب المعين بالمتباينات المعطاة برسم المستقيم x+y=o وتحريكه موازيا لنفسه في اتجاه المضلع اول ركن نقابله يكون الركن B(1,1) وتكون عنده الدالة نهاية صغرى وهي تساوي :

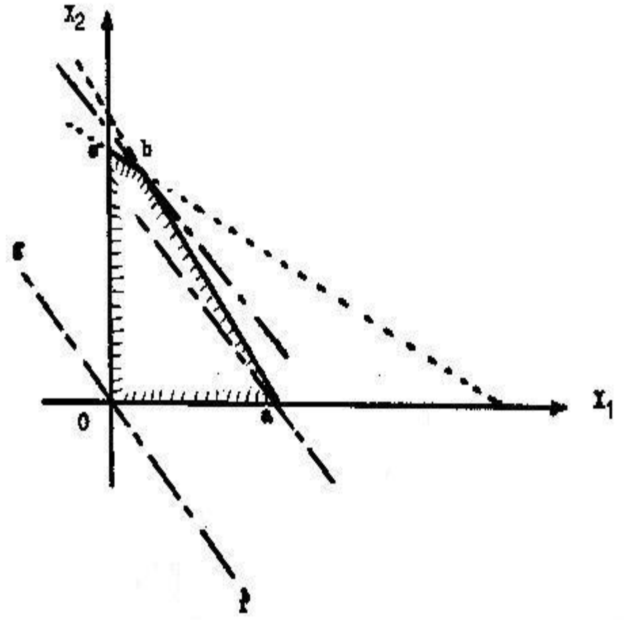
$$x + y = 1 + 1 = 2$$

وحيث ان المضلع المحدب مفتوح اعلى فانه يمكن جعل قيمة الدالة كبيرة كيفما يشاء،
وعلى هذا فان الدالة ليست لها نهاية عظمى محددة.



8. بأخذ وحدة القياس في الرسم =1000 وحدة يتم تمثيل القيود بيانيا ويتكون عندها المضـلع oabc. ثم نرسـم المسـتقيم fg الذي يمثل اتجاه الدالة ونحركه موازيا لنفسـه باتجاه المضـلع فتكون النقطة b هي اخر نقطة يلامسها وبالتالي فهي تمثل الحل الامثل.

$$b = (x_1 = 0.5, x_2 = 3.75)$$



اي ان

$$x_1 = 500$$

$$x_2 = 375$$

$$f(x) = 2.5(500) + 2(3750)$$

$$= 8750$$

الفصل السادس

تصنيف وخواص حلول البرمجة الخطية

Classification and Properties of Linear Programming Solutions

عرفنا من الفصل السابق ان حل مسائل البرمجة الخطية يتكون من:

i) ايجاد مجموعة الحلول التي تحقق القيود

ii) اختيار الحل(او الحلول) الذي يجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن او اصــغر مايمكن، كما لاحظنا بان الحل الامثل يكون دائما احد النقاط الحدية اي احد الحلول الاســـاســـية الممكنة.

وهنا نريد ان نميز بين انواع الحلول الثلاثة التي تظهر في مسائل البرمجة الخطية وهي:

i) الحلول الممكنة Feasible Solution

ii) الحلول الاساسية الممكنة (حلول النقاط الحدية)

Basic Feasible Solution (Extreme Points)

iii) الحل الامثل Optimal Solution

وسنتناول فيمايلي مناقشة كل واحد من هذه الحلول بمزيد من التفصيل:

1.6 الحلول الممكنة Feasible Solution

تعرُف الحلول الممكنة بانها قيم متغيرات القرار التي تحقق جميع القيود الهيكلية وغير الســالبة. ورياضــياً هي قيم X_J التي تحقق القيود الهيكلية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i \qquad\qquad i = 1,2,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad\qquad j = 1,2,\dots,n$$

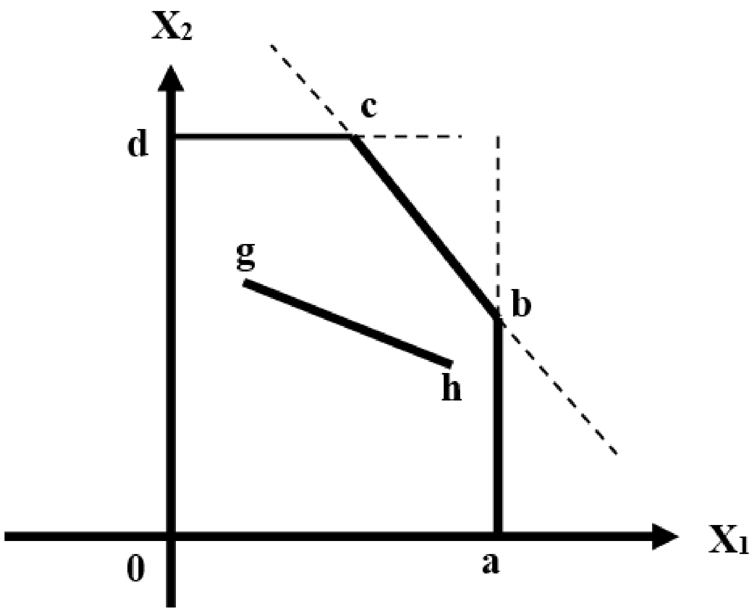
ويكون عدد الحلول الممكنة غير محدود.

من اهم خواص هذه الحلول انها من مجموعة محدبة، (convex Region) او بمعنى اخر فان القيود الهيكلية وغير السالبة تشكل معا مضلعا محدبا ولنأخذ على سبيل المثال القيود التالية:

$$x_1 \le 4$$
$$x_2 \le 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

و

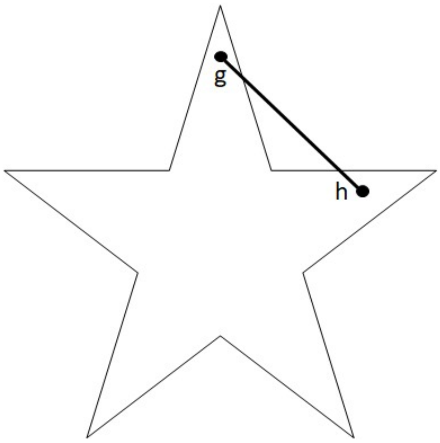
$$X_1 \ge 0$$
$$X_2 \ge 0$$



شكل (1)

لقد تم تمثيل هذه القيود بيانيا بالمضــلع المحدب oabcd كما في الشــكل (1) لو اخذنا اي نقطتين داخل المضــلع مثل h,g فان الخط المســتقيم gh يقع بالكامل داخل المضــلع، اي ان اي نقطة على المســتقيم hg تقع داخل المضلع، وهكذا فان oabcd مضلعا محدبا (Convex Polygon) وكمثال على المضلع غير المحدب الشكل التالي:

اذا اخترنا اي نقطتين داخل الشكل(اي ضـمن المسـاحة المحصـورة باضـلاع النجمة) مثل h,g ووصـلنا بينهما فاننا نجد بان الخط المستقيم gh لايقع بالكامل داخل النجمة وبالتالي ليس اي نقطة على المستقيم gh تقع داخل المضلع وهذا يدل على ان هذا المضلع (النجمة) مضلعا غير محدباً.



شكل (2)

2.6 حلول النقاط الحدية والحلول الاساسية الممكنة

Basic Feasible Solution (Extreme Points)

أ- حلول النقاط الحدية: Extreme Points Solutions

تعريف: النقاط الحدية هي نقاط زاويا المضــلع المحدب ولا تكون واقعة على اي مســتقيم يصــل بين نقطتين داخل المضــلع، وانما هي نقط تقاطع اضـــلاع المضـــلع المتجاورة، ولتحديد او ايجاد الحلول الحدية هناك طريقتان هما:

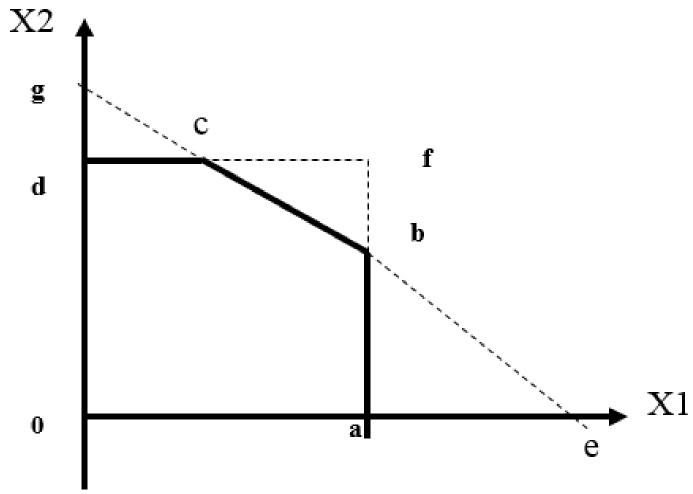
الطريقة الاولى

دعنا نأخذ مرة اخرى القيود التالية:

$$x_1 \qquad\qquad \leq 4$$
$$x_2 \quad \leq 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \quad \leq 18$$

و

$$X_1 \qquad\qquad \geq 0$$
$$X_2 \quad \geq 0$$



شكل (3)

من الواضـــح ان نقط الزوايا d,c,b,a هي النقط الحدية لان اي منها لايقع على مســـتقيم واصـــل بين نقطتين بل كل منهما عبارة عن تقاطع مســـتقيمين متجاورين من اضـــلاع المضـــلع فمثلا النقطة 0 هي تقاطع المستقيمين x1=0، x2=0 والنقطة a هي تقاطع المستقيمين $x_2 = 0$، $x_1 = 4$

ولكن يجب التنبه الى انه ليس كل تقاطع مستقيمين حتى لو متجاورين نقطة حدية، لانه قد لاتحقق باقي القيود. وفي مثالنا فان النقط e,f,g ليست نقاط حدية بالرغم من انها تقاطع لاضلاع المضلع. او هي تقاطع للخطوط المستقيمة الممثلة للقيود او لبعض القيود.

الطريقة الثانية:

في هذه الطريقة، نفكر بالاجراء الذي يعطينا الحلول، والذي يكشف لنا ما اذا كانت جميع القيود الهيكلية متحققة. ويتم ذلك بتحويل متباينات القيود الهيكلية الى متساويات بدلا من اهمال اشارة > او <، فاي متباينة من النوع ≤ يمكن تحويلها الى معادلة باضافة كمية جديدة غير سالبة لها.

وللتوضيح فلنأخذ نفس القيود السابقة:

$$\mathbf{x_1 \leq 4}$$

$$x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

و

$$x_1 \geq 0$$

$$x2 \geq 0$$

فيمكننا تحويل القيود الهيكلية الى معادلات باضافة الكميات x_5, x_4, x_3 الى الطرف الايسر في كل قيد على الترتيب. وتسمى هذه المتغيرات الجديدة بالمتغيرات المتممة او متغيرات الترخيم(كما يسميها البعض) او المتغيرات المكملة(Slack Variables).

وبهذا تصبح القيود الهيكلية كمايلي:

$$x_1 \quad +x_3 \quad = 4.............(1)$$

$$x_2 \quad +x_4 \quad = 6..........\dots(2)$$

$$3x_1 + 2x_2 \quad +x_5 = 18.............(3)$$

اذا كانت قيم x_5,x_4,x_3 موجبة فان هذا يعني بان الطرف الايسر في كل قيد اقل من الطرف الايمن. واذا كانت قيمها تساوي صفر فان هذا يعني بان الطرف الايسر في كل قيد يساوي الطرف الايمن. ولايمكن ان تكون قيم x_5,x_4,x_3 سالبة لان هذا يتعارض مع القيد نفسه. وبهذا فان:

$$x_5 \geq 0 \;,\quad x_4 \geq 0 \;,\quad x_3 \geq 0$$

وبناء عليه فاننا نصل الى هاتين الملاحظتين الهامتين:

1. اي اختلال يقع في القيود الهيكلية يكون نتيجة لكون المتغيرات المتممة سالبة.
2. ان استعمال اي من القيود الهيكلية للحصول على حلول النقط الحدية يجب ان يكون مقترنا بحقيقة ان المتغير المتمم المناظر يساوي صفر.

وهكذا فللحصول على حلول النقط الحدية في القيود المعطاة معنا فاننا سنختار قيدين معا. وبالاستفادة من الملاحظة الثانية سنعوض في المعادلات(1)،(2)،(3) وسنصل الى ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل. للتوضيح لنأخذ:

$$\begin{aligned} x_1 \quad &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

هذان القيدان تم تحويلهما الى المعادلات (1)،(2) باضافة المتغيرات المتممة x_4, x_3 وحسب الملاحظة الثانية دع $x_3=0, x_4=0$ ومن ثم عوض(1)،(2)،(3) فنحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= 6 \\ x_5 &= -6 \end{aligned}$$

والحل هو:

$$\begin{array}{lll} X_1 = 4 & X_2 = 6 & \\ X_3 = 0 & X_4 = 0 & X_5 = -6 \end{array}$$

ولكن x_5 هنا سالبة، وهذا يخل بالقيد الثالث $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ ولذلك فان الحل ليس حلا لنقطة حدية.

خذ

$$x_1 \leq 4$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

وقـد تـم تحويل هذيـن القيدين الـى المعادلتيـن (1)،(3) باضافــة المتغيريــن المتمميــن X_5, X_3 دع $x_5=0, x_3=0$ وعوض في المعادلات (1)،(2)،(3) فنحصل على :

$$x_1 = 4 , x_2 = 3 , x_4 = 3$$

والحل يكون:

$$x_1 = 4 , x_2 = 3 , x_3 = 3 , x_4 = 0 , x_5 = 0$$

لايوجد اي متغير سالب ويكون هذا الحل احد حلول النقط الحدية.

خذ

$$0 \geq X_1$$
$$0 \geq X_2$$

اجعل $x_1 = 0$، $x_2 = 0$ وعوض في المعادلات الثلاث (1)، (2)، (3) سنحصل على:

$$x_3 = 4$$
$$x_4 = 6$$

ويكون الحل $x_5 = 18$، $x_4 = 6$، $x_3 = 4$، $x_2 = 0$، $x_1 = 0$ الذي هو احد حلول النقط الحدية.

وبتطبيق نفس المبدأ على جميع الحالات الممكنة نحصل على:

$O =$ $x_1 = 0$ $x_2 = 0$
$x_3 = 4$ $x_4 = 6$ $x_5 = 18$

$a =$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$
$x_1 = 4$ $x_4 = 6$ $x_5 = 6$

$b =$ $x_3 = 0$ $x_5 = 0$
$x_1 = 4$ $x_2 = 3$ $x_4 = 3$

$c =$ $x_4 = 0$ $x_5 = 0$
$x_1 = 2$ $x_2 = 6$ $x_3 = 2$

$d =$ $x_1 = 0$ $x_4 = 0$
$x_2 = 6$ $x_3 = 4$ $x_5 = 6$

وجميعها حلول النقط الحدية

ب- الحلول الاساسية الممكنة Basic Feasible Solution

في البداية ماهو الحل الاساسي؟

اذا كان لدينا m معادلة خطية مستقلة بـــــ n متغير(مجهول) حيث n>m فان الحل الاساسـي هو ذلك الحل الذي يمكن الحصول عليه بجعل (n-m) متغير تساوي الصفر ومن ثم اكمال الحل للـــــm متغير الباقية، او بعبارة اخرى اذا كان:

$$
\begin{array}{llllll}
a_{11} X_1 & +a_{12} X_2 & +\ldots\ldots\ldots+a1_n X_n & = & b_1 \\
a_{21} X_1 & +a_{22} X_2 & +\ldots\ldots\ldots+a2_n X_n & = & b_2 \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
a_{m1} X_1 & +a_{m2} X_2 & +\ldots\ldots\ldots+am_n X_n & = & b_m
\end{array}
$$

فان الحل الاساسي $(x_1, x2,...,xn)$ لهذه المعادلات هو اي حل يحقق:

i) ان لايكون هناك اكثر من m متغير قيمتها لاتساوي الصفر(غير صفرية) (اي انه علــى الاقل n-m متغير تساوي اصفار)

ii) الحل بدلالة المتغيرات غير الصفرية يكون حلا وحيداً

(بما ان n-m متغيرات صفرية فانه يبقى لدينا m متغير بـ m معادلة)

ان الـــ m متغير تدعى **بالمتغيرات الاساسية** Basic Variables او المتغيرات غير المستقلة بينما الـ n-m متغير تدعى **بالمتغيرات غير الاساسية او المتغيرات المستقلة**

Non-Basic Variable or Independent variables

الان **الحل الاساسي الممكن** هو الحل الاساسي وفي نفس الوقت الممكن، وحيث جميع الـ m متغير تكون غير سالبة (≥ 0)

ومن هذا فان الحل الاساسي الممكن هو حل نقطة حدية. وللتوضيح خذ نفس القيود السابقة وهي :

$$x_1 \leq 4$$
$$x2 \leq 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

&

$$x_1 \geq 0$$
$$x2 \geq 0$$

يتم تحويـل القيود الهيكليـة الى معـادلات بـاضــــافـة المتغيرات المتممـة x_5,x_4,x_3 كمـا اعطى في المعادلات(1)،(2)،(3).

لنأخذ

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

دع

$x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ثم عوض في المعادلات (1)،(2)،(3) فتكون:

$$x_3 = 4$$
$$x_4 = 6$$
$$x_5 = 18$$

في هذا الحل x_1 ،x_2 متغيرات غير اساسية او مستقلة و x_5,x_4,x_3 متغيرات اساسية. وهذا حل اساسي ممكن ويمثل النقطة O في الشكل (3.3).

وبنفس الاسلوب اذا كانت $x2 = 0$ ، $x3 = 0$ وعوضنا في المعادلات (1)،(2)،(3) فاننا نحصل على:

$$x_1 = 4$$
$$x_4 = 6$$
$$x_5 = 6$$

في هذا الحل x_2،x_3 متغيرات غير اساسية بينما x_1 ،x_4،x_5 متغيرات اساسية. وهذا حل اساسي ممكن وهو يمثل النقطة a في الشكل (3.3).

ولكن اذا جعلنا $x5=0$ ، $x1=0$ وعوضنا في المعادلات(1)،(2)،(3) فاننا نحصل على:

$$x_2 = 9$$
$$x_3 = 4$$
$$x_4 = -3$$

في هذا الحل x_1،x_5 متغيرات غير اساسية بينما x_2،x_3،x_4 متغيرات اساسية.

وهذا حل اساسي ولكنه غير ممكن لان x_4 سالبة.

وهذا ممثل بالنقطة g في الشكل (3.3).

بنفس الطريقة يمكننا اثبات ان كل من النقطتين f,e في الشكل (3.3) تمثل حلا اساسيا ولكنه غير ممكن. بينما كل من النقط d,c,b تمثل حلا اساسيا ممكنا. وهكذا فان الحلول الاساسية الممكنة هي:

	المتغيرات غير الاساسية	المتغيرات الاساسية
o	$x_1 = 0$, $x_2 = 0$	$x_3 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 18$
a	$x_2 = 0$, $x_3 = 0$	$x_1 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 6$
b	$x_3 = 0$, $x_5 = 0$	$x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_4 = 3$
c	$x_4 = 0$, $x_5 = 0$	$x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$
d	$x_1 = 0$, $x_4 = 0$	$x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_5 = 6$

ملاحظات:

1. ان الحل الذي تكون فيه المتغيرات المتممة متغيرات اساسية يدعى **بالحل الاساسي الممكن الاولى** وفي مثالنا هذا الحل ممثل بالنقطة O
2. عندما نحاول الحصول على حل اساسي ممكن من حل اساسي ممكن اخر، فاننا نقوم بتحويل متغير اساسي الى غير اساسي وجعل متغير اساسي يصبح اساسي.

مثلا بالانتقال من o الى a، المتغير غير الاساسي x_1 يصبح اساسي والمتغير الاساسي x_3 يصبح غير اساسي.

3.6 الحل الامثل

الحل الامثل هو حل ممكن او حل اساسي ممكن يحقق القيمة المثلى لدالة الهدف الخطية. وعادة نكون معنيين بالحلول الاساسية الممكنة لان الحل الامثل لمسألة البرمجة الخطية يوجد بين او ضمن حلولها الاساسية الممكنة. ومن هنا لايجاد الحل الامثل لمسألة برمجة خطية معطاة ، علينا ان نجد اولا الحلول الاساسية الممكنة ونعوضها في دالة الهدف. والحل الذي يعطي القيمة المثلى لدالة الهدف. والحل الذي يعطي القيمة المثلى لدالة الهدف يكون هو الحل الامثل:

مثال 1

اوجد قيم x_1، x_2 التي تعظم الدالة $f(x) = 3x_1 + 5x_2$ بشرط ان:

$$x_1 \leq 4$$
$$x_2 \leq 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

و

$$x_1 \geq 0 \; , \; x_2 \geq 0$$

كما مر معنا في القسم السابق فان النقط:

$$o = (x_1 = 0 \; , \; x_2 = 0)$$

$$a = (x_1 = 4 \; , \; x_2 = 0)$$

$$b = (x_1 = 4 \; , \; x_2 = 3)$$

$$c = (x_1 = 2 \; , \; x_2 = 6)$$

$$d = (x_1 = 0 \; , \; x_2 = 6)$$

قد وجد بانها حلول اساسية ممكنة، فاذا عوضنا كل حل من هذه الحلول في دالة الهدف نجد ان:

- ❖ عند الحل "o"

$$f(x) = 3(0) + 5(0) = 0$$

- ❖ عند الحل "a"

$$f(x) = 3(4) + 5(0) = 12$$

- ❖ عند الحل "b"

$$f(x) = 3(4) + 5(3) = 27$$

- ❖ عند الحل "c"

$$f(x) = 3(2) + 5(6) = 36$$

❖ عند الحل "d"

$$f(x) = 3(0) + 5(6) = 30$$

وهكذا عند النقطة c تحقق الدالة اعظم قيمة لها ويكون الحل الامثل:

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 6$$
$$f(x) = 36$$

وهذه النتيجة تتفق مع نتيجة الحل البياني (انظر مثال 1.2)

مثال 2

اوجد قيم x_1،x_2 التي تعظم الدالة $f(x) = 5x_1 - 2x_2$ بشرط ان:

$$3x_1 - 2x_2 \leq 12$$
$$x_1 - 5x_2 \leq 2$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

وان

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

الحـل:

لتحديد الحلول الاساسية الممكنة نحول المتباينا (القيود الهيكلية) الى معادلات باضـافة المتغيرات المتممة x_3، x_4،x_5 فتصبح:

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 - 5x_2 + x_4 = 2$$
$$- x_1 + 2x_2 + x_5 = 4$$

وباتباع الطريقة الثانية نجد ان الحلول الاساسية الممكنة هي:

$$(x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0)$$
$$(x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 0)$$
$$(x_1 = 56/13 \ , \ x_2 = 6/13)$$
$$(x_1 = 8 \quad , \quad x_2 = 6)$$
$$(x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2)$$

وبتعويض هذه الحلول في دالة الهدف نحصـــــل على القيم التالية 0، 10، 268/13، 28، 4− على التوالي.

وبهذا يكون الحل الامثل:

$$x_1 = 8$$
$$x_2 = 6$$
$$f(x) = 28$$

الخلاصة

يمكننا الان ان نلخص ما ذكرناه بمايلي:

1. اي مسألة برمجة خطية لها عدد غير محدود من الحلول وذلك لان مجموعة الحلول الممكنة عبارة عن محدب
2. هذا العدد من الحلول الممكنة ينقص الى عدد محدود من الحلول الاســـاســـية الممكنة وكل حل اساسي ممكن يتكون من:
   i. متغيرات غير اساسية(المتغيرات الصفرية)
   ii. متغيرات اساسية (المتغيرات غير الصفرية)

للانتقال من حل اساسي ممكن الى حل اساسي ممكن اخر، متغيراً اساسيا يصبح غير اساسي واخر غير اساسي يصبح اساسيا.

3. ضـــمن هذه الحلول الاســـاســـية الممكنة يكون الحل الامثل هو الحل الذي يحقق القيمة المثلى للدالة. ويمكن ان يكون هناك اكثر من حل امثل واحد.

تعقيب

بالرغم من ان عدد الحلول الاسـاسـية الممكنة محدودا ولكنه قد يكون كبيرا بحيث يصـعب عمليا حسـابها جميعا. وقد نجح DANTZIG في تطوير طريقة حديثة للتغلب على ذلك وهي ماتعرف بطريقة السمبلكس. في هذه الطريقة ليس من الضروري ان نغطي جميع الحلول الاساية الممكنة، لانها تقود دائما الى الحلول الاساسية الممكنة الافضل حتى تصل الى الحل الامثل. وسندرس هذه الطريقة في الفصل القادم.

4.6 مسائل الفصل السادس / تصنيف وخواص حلول البرمجة الخطية

1. اوجد حلول النقط الحدية جبريا وبيانيا للقيود التالية:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ \& \\ x_1 \quad &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. اوجد حلول النقط الحدية جبريا وبيانيا للقيود التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 - 6x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq 2 \\ -2x_1 + x_2 &\geq 1 \\ \& \\ x_1 \quad &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. اوجد حلول النقط الحدية جبريا وبيانيا للقيود التالية:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 - 6x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ \& \\ x_1 \quad &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. اوجد جبريا وبيانيا الحلول الاساسية الممكنة للقيود التالية:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1 + x_2 = 7$$

&

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

5. اوجد جبريا وبيانيا الحلول الاساسية الممكنة للقيود التالية:

$$x_1 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 = 8$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$

&

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

5.6 حل مسائل الفصل السادس/ تصنيف وخواص حلول البرمجة الخطية

لحل مثل هذه التمارين نتبع الخطوات التالية:

- نحول القيود الهيكلية الى معادلات باستخدام المتغيرات المتممة غير السالبة.
- نختار كل قيدين معا ونحل المعادلتين بتطبيق القاعدة القائلة بان اســـتعمال اي من القيود الهيكلية للحصـول على حلول النقط الحدية يجب يجب ان يكون مقترنا بحقيقة ان المتغير المتمم المناظر يساوي صفر.

وباتباع هذه الخطوات نصل الى اجوبة التمارين كمايلي:

1. حلول النقط الحدية هي:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 7$$

$$x_1 = 7 \quad , \quad x_2 = 0$$

2.

$$x_1 = 9/8 \quad , \quad x_2 = 13/4$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 4$$

$$x_1 = 1/3 \quad , \quad x_2 = 5/3$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$

.3

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$

$x_1 = 70/16$, $x_2 = 9/16$

$x_1 = 8$, $x_2 = 6$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$

.4

$x_1 = 4$, $x_2 = 3$

$x_1 = 0$, $x_2 = 7$

.5

$x_1 = 2$, $x_2 = 1$

الفصل السابع

طريقة السمبلكس (SIMPLEX)

القسم الاول

1.7 ملخص الطريقة Summary

طريقة السـمبلكس هي اسـلوب تم تطويره لحل مسـائل البرمجة الخطية، وتطبيق هذه الطريقة يؤدي الى واحدة من الحالات التالية:

i. حل امثل محدود

ii. حل امثل غير محدود

iii. لا يوجد حل ممكن للمسألة

من المعلوم انه اذا كان لدينا m معادلة في n متغير $n > m$ مثل:

$$
\begin{array}{c}
q_{11} x_1 + q_{12} x_2 + \ldots + q_{1n} x_n \\
q_{21} x_1 + q_{22} x_2 + \ldots + q_{2n} x_n \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
q_{m1} x_1 + q_{m2} x_2 + \ldots + q_{mn} x_n
\end{array}
$$

وبما ان الحل الاسـاسـي لهذه المعادلات لايأتي الا اذا كان عدد المعادلات يسـاوي عدد المجاهيل، فيجب ان نختار n-m من هذه المجاهيل (المتغيرات) بحيث يساوي كل منها الصفر، وبذلك يتبقى لدينا m من

المعادلات في m من المجاهيل، وبذلك يمكن حلها وتسمى الـــ n-m متغيرات غير اساسية اما بقية المتغيرات وعددها m فتسمى متغيرات اساسية.

تتلخص طريقة السمبلكس بما يلي:

1. تحويل القيود الهيكلية الى معادلات باضافة او طرح متغيرات متممة غير سالبة **Complementary Variables**

2. اختيار حل مبدئي اساسي ومسموح به، ويكون هذا الحل في اغلب الاحوال هو نقطة الاصل، حيث نختار قيمة المتغيرات المتممة كمتغيرات اساسية (لاصفرية).

3. عند كل مرحلة من مراحل الحل نختبر امثلية الحل الذي لدينا، فاذا كان هو الحل الامثل تنتهي الطريقة، واذا لم يكن نختار حلا اخر افضل منه.

   والقاعدة التي تستخدم للاختبار تعتمد اساسا على اشارة معاملات المتغيرات في دالة الهدف بعد كتابتها بدلالة المتغيرات غير الاساسية، فاذا كنا نسعى للحصول على النهاية العظمى فان اشارات معاملات المتغيرات يجب ان تكون كلها سالبة، وذلك لانه بزيادة اي من المتغيرات فان قيمة دالة الهدف سوف تتناقص، اما اذا كنا نريد الحصول على النهاية الصغرى لدالة الهدف فان اشارات معاملات المتغيرات يجب ان تكون موجبة، لانه لو زاد اي متغير بعد ذلك فسوف تتزايد دالة الهدف.

4. عند الانتقال من حل الى اخر افضل منه فان احد المتغيرات غير الاساسية سيصبح متغيرا اساسيا، ويطلق عليه اسم **المتغير الداخل Entering Variable** وفي مقابل ذلك فان متغيرا اساسيا سيصبح غير اساسي، ويطلق عليه اسم **المتغير الخارج Leaving Variable**.

والقاعدة التي على اساسها نختار المتغير الداخل والخارج هي :

اولاً: المتغير الداخل Entering Variable

نختاره بحيث يعمل على تحسين دالة الهدف نحو حل افضل، فاذا كان المطلوب هو ايجاد اكبر قيمة لدالة الهدف وكانت جميع معاملات المتغيرات غير الاساسية بها موجبة، نختار المتغير ذو اكبر معامل موجب، واذا كان المطلوب هو ايجاد اصغر قيمة لدالة الهدف وكانت جميع معاملات المتغيرات غير الاساسية بها سالبة نختار المتغير ذو اكبر معامل سالب.

ثانياً: المتغير الخارج Leaving Variable

حيث انه هو ذلك المتغير الاساسي الذي سيصبح متغيرا غير اساسي، فمعنى هذا ان قيمته ستصبح صفراً، وعلى هذا نختار المتغير الاساسي الذي تصبح قيمته صفرا قبل غيره عندما تزداد قيمة المتغير الداخل.

5. عند بلوغنا الى حل اساسي ممكن ولكنه ليس حلا امثلا، فاننا نعيد نفس الخطوات لنصل الى حل اخر اساسي ممكن ونختبر امثليته، ونبقى نعيد نفس الخطوات بادخال متغيرات غير اساسية واخراج اخرى اساسية، حتى نصل الى احدى الحالات الثلاثة المذكورة سابقاً.

2.7 طريقة السمبلكس عندما تكون القيود من النوع (اقل من او تساوي): Simplex method when constraints are of type (less than or equal to)

في هذا الفصل سنطبق طريقة السمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية التي تكون فيها القيود الهيكلية من النوع اقل من او تساوي ($\leq$)، وفيما بعد سنطبق الطريقة عندما تكون القيود الهيكلية على صورة اكبر من او تساوي ($\geq$) و ($=$) ومزيج من الانواع الثلاثة.

والمثال الرقمي التالي يبين طريقة الحل باستخدام طريقة السمبلكس:

مثال (1)

اوجد قيم x_2، x_1 التي تعظم دالة الهدف

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

بشرط ان

$$\left.\begin{array}{rl} X_1 & \leq 4 \\ X_2 & \leq 6 \\ 3X_1 + 2X_2 & \leq 18 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وان

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0 \ \Big] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

الحل:

اولا نقوم بتحويل القيود الهيكلية الى معادلات باضـــــافة المتغيرات المتممة غير الســـــالبة X_5,X_4,X_3 فتصبح:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \quad\quad +X_3 \quad\quad\quad = 4 \\ \quad\quad X_2 \quad\quad +X_4 \quad\quad = 6 \\ 3X_1 + 2X_2 \quad\quad\quad +X_5 = 18 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_j \geq 0 \\ (j = 1, 2, \ldots, 5) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ثم لايجاد **الحل المبدئي الاساسـي الممكن** فاننا نجعل المتغيرات المتممة X_5, X_4, X_3 متغيرات اساسية ونعبر عنها بدلالة المتغيرات غير الاساسية X_2, X_1 فمن المعادلات (4) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} X_3 &= 4 - X_1 \\ X_4 &= 6 - X_2 \\ X_5 &= 18 - 3X_1 - 2X_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

وبوضع $X_1 = 0$ ، $X_2 = 0$ نحصل على:

$$X_3 = 4 \quad , \quad X_4 = 6 \quad , \quad X_5 = 18$$

ويكون الحل المبدئي الاساسي الممكن هو:

$X_1 = 0 \;,\; X_2 = 0$ (متغيرات غير اساسية)

$X_3 = 4 \;,\; X_4 = 6 \;,\; X_5 = 18$ (متغيرات اساسية)

وهذا يعني اننا اخترنا نقطة الاصل كحل مبدئي اساسي ممكن (وهي حل نقطة حدية)، وتكون قيمة دالة الهدف عند هذا الحل تساوي صفر اي ان $f(x) = 0$.

السؤال الان: هل هذا الحل هو الحل الامثل؟

بما ان المسـألة هي تعظيم دالة الهدف $f(x) = 3X_1 + 5X_2$ (معبراً عنها بدلالة المتغيرات غير الاساسية)، يصبح السؤال هل لو ضعنا X_1 او X_2 متغيرا اساسيا(اي لوزدنا قيمته عن الصفر) هل تزيد قيمة الدالة؟ الجواب نعم لان معامل كل منهما في الدالة موجباً، واي زيادة في اي منهما ستزيد الدالة،

اذا فان هذا الحل المبدئي الاساسي الممكن ليس هو الحل الامثل،

الان علينا ان نبحث عن حل اساسي ممكن افضل، وهذا يتطلب اختيار المتغير الداخل والمتغير الخارج.

المتغير الداخل:

نختار المتغير غير الاســاســي X_1، X_2 الذي يقود الى زيادة دالة الهدف، في مثالنا لوزادت X_1 بمقدار وحده فان دالة الهدف ســـتزيد بمقدار 3 وحدات، ولو زادت X_2 بمقدار وحدة واحدة لزادت دالة الهدف بمقدار 5 وحدات، اذا فان X_2 ســيكون هو المتغير الداخل. وهكذا **فان المتغير الداخل هو المتغير غير الاساسي ذو المعامل الموجب الاكبر في دالة الهدف.**

المتغير الخارج:

سـنختار احد المتغيرات الاسـاسـية X_3،X_4،X_5 ليحل محل X_2 اي يصـبح متغيرا غير اسـاسـي يسـاوي الصفر. بما ان قيمة هذا المتغير الخارج ستصبح صفرا، اذا فاننا نختار المتغير الذي يصل الى الصفر اولا عندما تزيد قيمة X_2، وكي نعرف اي هذه المتغيرات يصـل الى الصـفر اولا بتزايد X_2 دعنا ناخذ قيم X_3،X_4،X_5 بدلالة X_2 (تذكران X_1 مازال متغيرا غير اساسي = صفر). فمن المعادلات (6) نجد ان:

$X_3 = 4$ لا تعتمد على X_2

$$X_4 = 6 - X_2$$

$$X_5 = 18 - 2X_2$$

X_4 تصبح مساوية للصفر عندما تزيد X_2 الى 6

X_5 تصبح مساوية للصفر عندما تزيد X_2 الى 9

وهكذا حين تكون $X_2=6$ نجد ان $X_4=0$، بينما $X_5=18-12=6$، هذا يعني ان X_4 تصــل الى الصــفر قبل X_5 عندما تزيد قيمة X_2.بناء عليه يكون X_4 هو المتغير الخارج، وهذا يصون امكانية الحل، بينما لو اخترنا X_5 كمتغير خارج اي $X_5=0$ تكون قيمة $X_2=9$، وتكون قيمة $X4=6-9=-3$ مما يخالف قيد او شرط عدم سالبية المتغيرات.

وهكذا فالحل الجديد يحتوي على X_1 ، X_4 كمتغيرات غير اســاســية، والمتغيرات X_2،X_3،X_5 كمتغيرات اساسية.

لايجاد قيم X_2 ،X_3،X_5 دعنا نعبر عنها بدلالة المتغيرات غير الاسـاسـية ونبدأ بالمتغير الداخل X_2، من المعادلة الثانية في المعادلات (6) نحصل على :

$$X_2 = 6 - X_4$$

بالتعويض في باقي المعادلات (6) نحصل على

$$X_3 = 4 - X_1$$
$$X_5 = 18 - 3X_1 - 2(6-X_4)$$
$$= 6 - 3X_1 + 2X_4$$

وهكذا تصبح المعادلات(6) كمايلي:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= 6 - X_4 \\ X_3 &= 4 - X_1 \\ X_5 &= 6 - 3X_1 + 2X_4 \end{aligned}\right\} \text{.....................(7)}$$

وكذلك بالتعبير عن دالة الهدف بدلالة المتغيرات غير الاساسية X_1،X_4 نجد انها تساوي:

$$f(x) = 3X_1 + 5(6-X_4)$$
$$\left. = 30 + 3X_1 - 5X_4 \right\} \text{.................(8)}$$

وهكذا فان الحل الجديد هو:

(متغيرات غير اساسية) $X_1 = 0\ ,\ \ X_4 = 0$

(متغيرات اساسية) $X_2 = 6\ ,\ \ X_3 = 4\ \ ,\ \ X_5 = 6$

$$f(x) = 30$$

هل هذا هو الحل الامثل؟

نختبر امثلية هذا الحل:

فاذا اختبرنا دالة الهدف في (8) نجد ان معامل X_4 هو -5 بينما معامل X_1 هو $+3$، وهذا يعني ان اي زيادة في X_1 ستزيد من قيمة دالة الهدف، اذا فهذا الحل ليس هو الحل الامثل.

سنحاول البحث عن حل جديد، حل اساسي ممكن افضل:

المتغير الداخل:

في الحل السـابق المتغيرين X_1 ،X_4 هما المتغيران غير الاساسـيان وبما ان X_1 هو المتغير الوحيد الذي معامله في دالة الهدف موجباً يكون هو المتغير الداخل.

المتغير الخارج:

من المعادلات (7) نجد:

X_2 لا تعتمد على X_1

$X_3 = 0$ عندما $X_1 = 4$

$X_5 = 0$ عندما $X_1 = 2$

(تذكر ان X_4 متغير غير اساسي = صفر)

وهذا يعني ان X_5 تصل الى الصفر اولا بزيادة X_1 المتغير الداخل، اذا فان X_5 هو المتغير الخارج.

وعليه يكون المتغيران X_4، X_5 هما المتغيران غير الاســـاســـيان في الحل الجديد وتكون المتغيرات X_1،X_2،X_3 هي المتغيرات الاساسية.

دعنا نعبر عن المتغيرات الاساسية بدلالة المتغيرات غير الاساسية، فتصبح المعادلات(7)

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= 1/3(6 + 2X_4 - X_5) \\ &= 2 + 2/3X_4 - 1/3X_5 \\ X_2 &= 6 - X_4 \\ \\ X_3 &= 4 - (2 + 2/3X_4 - 1/3X_5) \\ &= 2 - 2/3X_4 + 1/3X_5 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

وكذلك فان دالة الهدف(8) تصبح:

$$\begin{aligned} f(x) &= 30 + 3(2 + 2/3X_4 - 1/3X_5) - 5X_4 \\ &= 36 - 3X_4 - X_5 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

وعليه يكون الحل الجديد الاساسي الممكن هو:

(متغيرات غير اساسية) $X_4 = 0 \quad , \quad X_5 = 0$

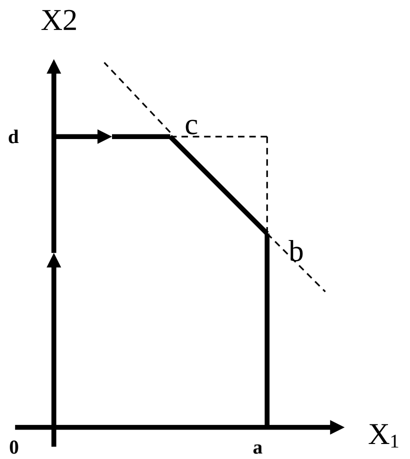
(متغيرات اساسية) $X_1 = 2 \quad , \quad X_2 = 6 \quad , \quad X_3 = 2$

$$f(x) = 36$$

بما ان معاملات X_4 ، X_5 في دالة الهدف كلاهما سالبا يكون هذا الحل هو الحل الامثل.

اذا ما قارنا الحل الامثل هذا بطريقة السـمبلكس مع الحل لنفس المثال بطريقة الرسـم البياني سـنجد ان طريقة السمبلكس بدأت من نقطة الاصل"0" كحل مبدئي اسـاسـي ممكن ثم انتقلت الى حل اخر اسـاسـي ممكن افضـل ممثلا بالنقطة الحدية"d" ثم اخيرا الى حل افضـل وهو الحل الامثل والممثل بالنفقة الحدية

"c" وهذا يبين ان طريقة السمبلكس لاتغطي بالضرورة جميع الحلول الاساسية الممكنة لحسن الحظ انها تصل الى الحل الامثل عبر اقصر طريق ممكن ($c \longrightarrow d \longrightarrow o$)



مثال (2)

اوجد قيم X_1 ، X_2 التي تعظم دالة الهدف

$$f(x) = 4X_1 - 2X_2 \qquad ....(11)$$

بشرط ان:

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 &\leq 6 \\ X_1 - 4X_2 &\leq 2 \qquad ....(12) \\ -X_1 + 2X_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

وان:

$$\begin{aligned} X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad ....(13)$$

الحل:

نقوم بتحويل القيود الهيكلية الى معادلات، وذلك باضافة المتغيرات المتممة X_3،X_4، X_5 اي:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 - X_2 + X_3 \qquad\qquad = 6 \\ X_1 - 4X_2 \quad +X_4 \qquad = 2 \\ -X_1 + 2X_2 \qquad\quad +X_5 = 4 \end{array}\right\} \text{.......................}(14)$$

خذ X_1،X_2 كمتغيرات غير اساسية والمتغيرات X_3،X_4،X_5 كمتغيرات اساسية

عبر عن المتغيرات الاساسية بدلالة المتغيرات غير الاساسية، تصبح المعادلات(14):

$$\left.\begin{array}{l} X_3 = 6 - X_1 + X_2 \\ X_4 = 2 - X_1 + 4X_2 \\ X_5 = 4 + X_1 - 2X_2 \end{array}\right\} \text{..................................}(15)$$

الحل المبدئي الاساسي الممكن هو:

(متغيرات غير اساسية) $X_1 = 0 \ , X_2 = 0$

(متغيرات اساسية) $X_3 = 6 \ , X_4 = 2 \ , X_5 = 4$

$$f(x) = 4X_1 - 2X_2 = 0$$

بما ان معامل X_1 في دالة الهدف موجبا، ولايكون هذا الحل هو الحل الامثل

اختيار حلا اساسيا ممكنا افضل:

X_1 هو المتغير الداخل لان معامله في دالة الهدف موجبا، من (15) نجد ان:

$X_1 = 6$ عندما $X3 = 0$

$X_1 = 2$ عندما $X_4 = 0$

X_5 تزيد بصورة غير محدودة عند زيادة X_1

(تذكر ان $X_2 = 0$ لانها متغير غير اساسي)

اذا فان X_4 هو المتغير الخارج

الحل الجديد: يحتوي على X_4، X_2 كمتغيرات غيراساسية و X_3،X_1،X_5 كمتغيرات اساسية.

نعيد كتابة المتغيرات الاساسية بدلالة المتغيرات غير الاساسية، فتصبح المعادلات (15):

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= 2 + 4X_2 - X_4 \\ X_3 &= 6 - (2 + 4X_2 - X_4) + X_2 \\ &= 4 - 3X_2 + X_4 \\ X_5 &= 4 + (2 + 4X_2 - X_4) - 2X_2 \\ &= 6 + 2X_2 - X_4 \end{aligned}\right\} \quad \text{.............................}(16)$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 4(2 + 4X_2 - X_4) - 2X_2 \\ &= 8 + 14X_2 - 4X_4 \end{aligned}\right\} \quad \text{...................................}(17)$$

وهكذا يكون الحل:

$$X_2 = 0 \;,\; X_4 = 0$$
$$X_1 = 2 \;,\; X_3 = 4 \;,\; X_5 = 6$$
$$f(x) = 8$$

من (17) نجد ان هذا الحل ليس هو الحل الامثل، وذلك لان معامل X_2 في دالة الهدف موجباً،

اختيار حلا اساسيا ممكنا افضل:

X_2 سيكون هو المتغير الداخل من (16) نجد ان:

X_1 تزيد بصورة غير محدودة مع زيادة X_2

$X_3 = 0$ عندما تكون $X_2 = \frac{4}{3}$

X_5 تزيد زيادة غير محدودة بزيادة X_2 (تذكر $X_4 = 0$)

اذن فان X_3 هو المتغير الخارج

الحل يحتوي على X_3،X_4 كمتغيرات غير اساسية و X_1،X_2،X_5 كمتغيرات اساسية، نعبر عن المتغيرات الاساسية بدلالة المتغيرات غير الاساسية فتصبح المعادلات(16)

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= 4/3 - 1/3\,X_3 + 1/3X_4 \\ X_1 &= 2 + 4(4/3 - 1/3X_3 + 1/3X_4) - X_4 \\ &= 22/3 - 4/3X_3 + 1/3X_4 \\ X_5 &= 6 + 2(4/3 - 1/3X_3 + 1/3X_4) - X_4 \\ &= 26/3 - 2/3X_3 - 1/3X_4 \end{aligned}\right\} \quad \text{.................}(18)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 8 + 14(4/3 - 1/3X_3 + 1/3X_4) - 4X_4 \\ &= 80/3 - 14/3X_3 + 2/3X_4 \qquad \text{....................}(19) \end{aligned}$$

الحل هو:

$X_3 = 0\ ,\ X_4 = 0$ (متغيرات غير اساسية)

$X_1 = 22/3\ ,\ X_2 = 4/3\ ,\ X_5 = 26/3$ (متغيرات اساسية)

$f(x) = 80/3$

من (19) نجد ان هذا الحل ليس هو الحل الامثل لان معامل X_4 في دالة الهدف موجبا.

ابحث عن حل اساسي ممكن افضل:

X_4 هو المتغير الداخل لانه الوحيد الذي له معامل موجب في دالة الهدف

من (18) نجد ان:

X_1 تزيد زيادة غير محدودة بزيادة X_4

X_2 تزيد زيادة غير محدودة بزيادة X_4

$X_5 = 0$ عندما $X_4 = 26$

الحل يحتوي على X_3، X_5 كمتغيرات غير اساسية X_1،X_2،X_4 كمتغيرات اساسية نعبر عن المتغيرات الاساسية بدلالة المتغيرات غير الاساسية فتصبح المعادلات (18):

$$\left.\begin{aligned}
X_4 &= 26 - 2X_3 - 3X_5 \\
X_2 &= 4/3 - 1/3X_3 + 1/3(26 - 2X_3 - 3X_5) \\
&= 10 - X_3 - X_5 \\
X_1 &= 22/3 - 4/3X_3 + 1/3(26 - 2X_3 - 3X_5) \\
&= 16 - 2X_3 - X_5
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 80/3 - 14/3\, X_3 + 2/3(26 - 2X_3 - 3X_5) \\
&= 44 - 6X_3 - 2X_5 \quad \} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)
\end{aligned}$$

يكون الحل هو:

$X_3 = 0 \quad , \quad X_5 = 0$

$X_1 = 16 \quad , \quad X_2 = 10 \quad , \quad X_4 = 2$

$f(x) = 44$

من(21) نجد ان جميع المعاملات سالبة فيكون هذا الحل الامثل.

الان من المثاليين السابقين نصل الى استخلاص ان طريقة السمبلكس تتكون من نوعين رئيسيين من القواعد او القوانين:

أ- قواعد القرار

ب- قواعد التحويل

أ- قواعد القرار Decision Rules

القاعدة (1) اختبار الامثلية:

ناخذ دالة الهدف معبرا عنها بدلالة المتغيرات غير الاساسية :

في مسائل البرمجة الخطية التي يراد فيها تعظيم الدالة يكون الحل امثلا اذا كانت جميع المعاملات في دالة الهدف سالبة، وفي مسائل التصغير يكون الحل امثلاً اذا كانت جميع المعاملات في دالة الهدف موجبة.

القاعدة(2) اختبار المتغير الداخل:

في مسائل التعظيم يكون المتغير الداخل هو المتغير غير الاساسي صاحب اكبر معامل موجب في دالة الهدف، وفي مسائل التصغير يكون المتغير الداخل هو المتغير غير الاساسي صاحب اكبر معامل سالب في دالة الهدف.

القاعدة(3) اختيار المتغير الخارج:

المتغير الخارج هو المتغير الاساسي الذي يصل الى الصفر اولاً عند زيادة قيمة المتغير الداخل. وهذه القاعدة تنطبق على كل من مسائل التعظيم والتصغير.

ب- قواعد التحويل Transfer rules

هذه القواعد تتعلق بالتعبير عن المتغيرات الاساسية ودالة الهدف بدلالة المتغيرات غير الاساسية، وهذه القواعد ستوضح اكثر في الجزء القادم.

3.7 طريقة السمبلكس بصورة جبرية مبسطة
Simple Algebraic Method

دعنا نبدأ بمسألة البرمجة الخطية البسيطة التالية:

اوجد قيم X_2،X_1 التي تعظم دالة الهدف:

$$f(x) = C_1X_1 + C_2X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (22)$$

$$\left.\begin{aligned} X_3 &= b_1 - a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \\ X_4 &= b_2 - a_{21}X_1 - a_{22}X_2 \\ X_5 &= b_3 - a_{31}X_1 - a_{32}X_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

∴ فان الحل المبدئي الاساسي الممكن هو

$X_1 = 0 \;,\; X_2 = 0$ (متغيرات غير اساسية)

$X_3 = b_1 \;,\; X_4 = b_2 \;,\; X_5 = b_3$ (متغيرات اساسية)

$$f(x) = C_1X_1 + C_2X_2 = 0$$

افترض ان كل من C_2،C_1 موجبا، وبهذا لا يكون هذا الحل هو الحل الامثل، نبحث عن حل افضل:

حل اساسي ممكن افضل:

المتغير الداخل: افترض ان $C_1 > C_2$ فيكون X_1 هو المتغير الداخل.

المتغير الخارج: من (26) وبوضع $X_2 = 0$ نحصل على:

$X1 = b1/a11$ عندما $X3 = 0$

$X1 = b2/a21$ عندما $X4 = 0$

$X1 = b3/a31$ عندما $X5 = 0$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 &\le b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 &\le b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 &\le b_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

&

$$X_1 \ge 0 \ , \ X_2 \ge 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

حيث

$C_1 , C_2 , a_{ij} , b_i \ge 0$ ثوابت

$(i = 1, 2, 3)$

$(j = 1, 2)$

نحول القيود الهيكلية الى معادلات باضافة المتغيرات المتممة غير السالبة X_5,X_4,X_3 فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + X_3 \qquad\qquad &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \qquad + X_4 \qquad &= b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 \qquad\qquad + X_5 &= b_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

الحل المبدئي الاساسي الممكن :

بجعل المتغيرات المتممة متغيرات اساسية، وكتابتها بدلالة المتغيرات غير الاساسية تصبح المعادلات (25) كمايلي:

ان المتغير الاساسي الذي له القيمة الصغرى من النسب

$$b_1/a_{11}\ ,\ b_2/a_{21}\ ,\ b_3/a_{31}$$

سيكون هو المتغير الخارج.

افترض ان b_2/a_{21} هو اقل قيمة فيكون X_4 هو المتغير الخارج.

في الحل الجديد X_2، X_4 متغيرات غير اساسية و X_1، X_3،X_5 متغيرات اساسية وبالتعبير عن المتغيرات الاساسية ودالة الهدف بدلالة المتغيرات غير الاساسية فاننا من المعادلات (26) نحصل على:

$$\begin{aligned}
X_1 &= b_2/a_{21} - a_{22}/a_{21}X_2 - 1/a_{21}X_4\\
X_3 &= b_1 - a_{11}(b_2/a_{21} - a_{22}/a_{21}X_2 - 1/a_{21}X_4) - a_{12}X_2\\
&= (b_1 - a_{11}b_2/a_{21}) - (a_{12} - a_{11}a_{22}/a_{21})X_2 - (0 - a_{11}/a_{21})X_4\\
X_5 &= b_3 - a_{31}(b_2/a_{21} - a_{22}/a_{21}X_2 - 1/a_{21}X_4) - a_{32}X_2\\
&= (b_3 - a_{31}b_2/a_{21}) - (a_{32} - a_{31}a_{22}/a_{21})X_2 - (0 - a_{31}/a_{21})X_4
\end{aligned}$$

وبعبارات اخرى:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= b'_2 - a'_{22}X_2 - a'_{24}X_4\\
X_3 &= b'_1 - a'_{12}X_2 - a'_{14}X_4\\
X_5 &= b'_3 - a'_{32}X_2 - a'_{34}X_4
\end{aligned}\right]\text{.................................(27)}$$

حيث:

$$\left.\begin{array}{lll} b'_1 = b_1 - a_{11}b_2/a_{21}, & a'_{12} = a_{12} - a_{11}a_{22}/a_{21}, & a'_{14} = -a_{11}/a_{21} \\ b'_2 = b_2/a_{21} & , \ a'_{22} = a_{22}/a_{21} & , \ a'_{24} = 1/a_{21} \\ b'_3 = b_3 - a_{31}b_2/a_{21}, & a'_{32} = a_{32} - a_{31}a_{22}/a_{21}, & a'_{34} = - a_{31}/a_{21} \end{array}\right\} \text{.......(28)}$$

وتكون دالة الهدف:

$$\begin{aligned} f(x) &= C_1(b_2/a_{21} - a_{22}/a_{21}X_2 - 1/a_{21}X_4) + C_2X_2 \\ &= C_1b_2/a_{21} + (C_2 - C_1a_{22}/a_{21})X_2 + (0 - C_1/a_{21})X_4 \\ &= C + C'_2X_2 + C'_4X_4 \qquad \text{............................(29)} \end{aligned}$$

حيث:

$$C = C_1b_2/a_{21} \ , \ C'_2 = C_2 - C_1a_{22}/a_{21} \ , \ C'_4 = - C_1/a_{21}$$

وعليه يكون الحل هو:

$$X_2 = 0 \quad , \quad X_4 = 0$$
$$X_1 = b'_2 \quad , \quad X_3 = b'_1 \ , \ X_5 = b'_3$$

و

$$f(x) = C$$

اذا كان كل من C_2، C_4 ســالبا، يكون الحل امثلا، اما اذا كان واحد منهما على الاقل موجبا يكون الحل غير امثل، وهنا نبحث عن حل اخر اساسـي ممكن افضل، ونعيد نفس الاجراءات حتى نصل الى الحل الامثل.

4.7 طريقة السمبلكس في الصورة الجدولية
Simplex method in tabular form

لو اخذنا نفس المثال السابق فان الحل الجبري لها يمكن تنظيمه في جدول كما سنوضح الان:

بعد تحويل المتباينات الى معادلات يمكننا تنظيمها في الجدول التالي:

المتغيرات الاساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الثوابت
X_3	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b_1
X_4	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b_2
X_5	a_{31}	a_{32}	0	0	1	b_3
-f(x)	C_1	C_2	0	0	0	0

يمكن قراءة هذا الجدول بطريقتين:

الاولى: نترك العمود الاول الذي به المتغيرات الاساسية ونبدأ من العمود X1 فنحصل على:

$$
\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + X_3 \qquad\qquad &= b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \qquad + X_4 \qquad &= b_2 \\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 \qquad\qquad + X_5 &= b_3
\end{aligned}
$$

وهي نفس المعادلات (25).

الثانية: نبدأ من العمود الاول ونترك اعمدة المتغيرات الاساسية فنحصل على:

$$X_3 = b_1 - a_{11}X_1 - a_{12}X_2$$
$$X_4 = b_2 - a_{21}X_1 - a_{22}X_2$$
$$X_5 = b_3 - a_{31}X_1 - a_{32}X_2$$
$$-f(x) = 0 - C_1X_1 - C_2X_2$$

وهي نفس المعادلات (26)

من العمودين الاول والاخير نستطيع ان نقرأ الحل المبدئي الاساسي الممكن وهو:

(متغيرات غير اساسية) $X_1 = 0 \ , \ X_2 = 0$

(متغيرات اساسية) $X_3 = b_1 \ , X_4 = b_2 \ , X_5 = b_3$

$$-f(x) = 0$$
$$f(x) = 0$$

نختبر امثلية الحل بالنظر الى المعاملات الموجودة في السطر الاخير من الجداول، اي C_1، C_2 اذا كان كلا منهما ســـالبا يكون الحل امثلا، ولكن اذا كان واحد منهما على الاقل موجبا لايكون هذا الحل امثلا، ونبحث عن حل اخر اساسي ممكن افضل.

افترض ان C_1، C_2 كل منهما موجبا، عندها لايكون الحل المبدئي حلا امثلا، لذلك ننتقل الى حل جديد افضل:

المتغير الداخل: هو المتغير الذ ي يكون معامله في دالة الهدف اكبر مايمكن، ولهذا نختبر C_1 ،C_2 في السطر الاخير ولنفرض ان $C_1>C_2$ فيكون X_1 هو المتغير الداخل ويطلق على العمود الذي في راسه هذا المتغير اسم **العمود المحوري** (Pivotal Column).

المتغير الخارج: لاختيار المتغير الخارج نقســم عناصــر عمود الثوابت كل على نظيره **الموجب فقط** من عناصر العمود المحوري، ثم نختار الصف الذي يناظر اقل هذه النسب، فيكون المتغير الاساسي المقابل

لهذا الصـف هو المتغير الخارج ويسـمى هذا الصـف **الصـف المحوري(Pivotal Row)** ويطلق على العنصر عند ملتقى العمود المحوري والصف المحوري اسم **العنصر المحوري**

(**Pivotal Element**) ففي مثالنا نقسم b3،b2،b1 على a31،a21،a11 على الترتيب، فنحصل على النسب التالية:

$$B_3/a_{31} \;,\quad b_2/a_{21} \;,\quad b_1/a_{11}$$

افترض ان b_2/a_{21} هي اصـغر نسـبة فيكون X_4 هو المتغير الخارج ويكون صـفه هو الصـف المحوري ويكون عنصر a_{21} هو العنصر المحوري.

في الحل الجديد

X_2 , X_4 (متغيرات غير اساسية)

X_5, X_1, X_3 (متغيرات اساسية)

الان الجدول الثاني :

يتم تكوين الجدول الثاني بتحويل عناصر الجدول السابق حسب القواعد التالية:

أ- بالنسـبة للصـف المحوري ينقل الى الجدول الجديد بعد قسـمة كل من عناصـره على العنصر المحوري، وهو في مثالنا a_{21}.

ب- بالنسبة للعمود المحوري تصبح جميع عناصره صفرا ماعدا العنصر المحوري الذي يأخذ القيمة(1).

ج- بالنسبة لباقي العناصر التي لاتقع في الصف المحوري او العمود المحوري فان العنصر الجديد=

$$\text{العنصر القديم} - \frac{\text{العنصر المقابل في العمود المحوري} \times \text{العنصر المقابل في الصف المحوري}}{\text{العنصر المحوري}}$$

فلو اخذنا العنصر a_{12} فانه يصبح:

$$A_{12} \Rightarrow \text{يصبح}\ a_{12} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}}$$

وهو نفس a'_{12} في المعادلات (28)

حيث:

a_{11} هو العنصر المقابل في العمود المحوري والواقع في نفس صف a_{12}

a_{22} هو العنصر المقابل في الصف المحوري والواقع في نفس عمود a_{12}

a_{21} هو العنصر المحوري

ويتضح ذلك في الرسم التالي

	العمود المحوري			
	a_{11}		$\boxed{a_{12}}$	
الصف المحوري	a_{12}		a_{22}	

$$a'_{12} \Rightarrow \text{يصبح}\ a_{12} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}}$$

يصبح الجدول الجديد كمايلي:

المتغيرات الاساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الثوابت
X_3	0	$a_{12}-\frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}}$	1	$-\frac{a_{11}}{a_{21}}$	0	$b_1-\frac{a_{11}b_2}{a_{21}}$
X_1	1	$\frac{a_{22}}{a_{21}}$	0	$\frac{1}{a_{21}}$	0	b_2/a_{21}
X_5	0	$a_{32}-\frac{a_{31}a_{22}}{a_{21}}$	0	$-\frac{a_{31}}{a_{21}}$	1	$b_3-\frac{a_{31}b_2}{a_{21}}$
-f(x)	0	$C_2-\frac{C_1a_{22}}{a_{21}}$	0	$-\frac{C_1}{a_{21}}$	0	$-C_1\frac{b_2}{a_{21}}$

اي هو نفس الجدول التالي:

المتغيرات الاساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الثوابت
X_3	0	a'_{12}	1	a'_{14}	0	b'_1
X_1	1	a'_{22}	0	a'_{24}	0	b'_2
X_5	0	a'_{32}	0	a'_{34}	1	b'_3
-f(x)	0	C'_2	0	C'_4	0	- C

الحل الجديد هو:

$$X_5 = b'_3 \quad , \quad X_1 = b'_2 \quad , \quad X_3 = b'_1$$ (متغيرات اساسية)

$$X_4 = 0 \quad , \quad X_2 = 0$$ (متغيرات غير اساسية)

$$f(x) = C$$

لاختبار امثلية الحل نختبر المعاملات C'_2، C'_4 في الصــــف الاخير، فاذا كان كل منهما ســــالبا يكون الحل امثلا، واذا كان اي منهما موجبا لايكون هذا الحل امثلا ونبحث عن حل جديد افضل.

يمكننا الان ان نلخص قواعد طريقة السمبلكس بالصورة الجدولية:

قواعد القرار:

1. **اختبار امثلية الحل:** نختبر العوامل في دالة الهدف بالســـطر (الصـــف) الاخير من الجدول، اذا كان المطلوب تعظيم الدالة وكانت المعاملات سالبة او صفر يكون الحل امثلا، واذا كان المطلوب تصغير الدالة وكانت المعاملات موجبه او صفر يكون الحل امثلا.
2. **المتغير الداخل:** هو المتغير صــاحب اكبر معامل موجب في دالة الهدف اي في الصــف الاخير من الجدول اذا كان المطلوب هو تعظيم الدالة، وهو صــاحب اكبر معامل ســالب في دالة الهدف اي في السطر الاخير اذا كان المطلوب هو تصغير الدالة.
3. **المتغير الخارج:** نقســـم الثوابت في العمود الاخير كل على نظيره في العمود المحوري (الموجب فقط)، المتغير الاساسي صاحب اقل نتيجة (او اقل نسبه) يكون هو المتغير الخارج.

قواعد التحويل:

1. الصف المحوري يحول بقسمه جميع عناصره على العنصر المحوري

2. العمود المحوري يحول بجعل جميع عناصـره مسـاوية للصـفر ماعدا العنصـر المحوري فيصـبح مساويا (1).

3. بقية العناصر تحول بتطبيق القاعدة التالية:

	b		a	
الصف المحوري	d		c	
	العمود المحوري			

$$a' = a - \frac{bc}{d}$$

مثال (1):

مرة اخرى لنأخذ المثال التالي:

اوجد قيم X_1،X_2 التي تعظم دالة الهدف $f(x) = 3X_1 + 5X_2$ بشرط ان

$$X_1 \le 4$$
$$X_2 \le 6$$
$$3X_1 + 2X_2 \le 18$$

وان

$X_1 \geq 0$
$X_2 \geq 0$

الحل:

نحول المتباينات الى معادلات باضـــافة المتغيرات المتممة غير الســـالبة X_3،X_4،X_5 فنحصـــل على:

$X_1 + X_3 = 4$

$X_2 + X_4 = 6$

$3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18$

يكون الجدول الاساسي كمايلي:

المتغيرات الاساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الثوابت
X_3	1	0	1	0	0	4
X_1	0	1	0	1	0	6
X_5	3	2	0	0	1	18
-f(x)	3	5	0	0	0	0

فالحل المبدئي الاساسي هو:

(متغيرات غير اساسية) $X_1 = 0 \ , \ X_2 = 0$

(متغيرات اساسية) $X_3 = 4 \ , \ X_4 = 6 \ , \ X_5 = 18$

$$f(x) = 0$$

المعاملات في دالة الهدف (السطر الاخير) موجبة،

اذا هذا ليس حلا امثلا وعلينا ان نبحث عن حل اخر افضل.

معامل X_2 في الصـــف الاخير هو الاكبر فيكون X_2 هو المتغير الداخل ويكون عمود X_2 هو العمود المحوري.

نقسم عناصر عمود الثوابت كل على نظيره (الموجب فقط) في العمود المحوري فنحصل على النسب التالية: $\frac{6}{1}$ ، $\frac{18}{2}$، وبما ان $6 < 9$ يكون المتغير X_4 هو المتغير الخارج ويكون صـــفه هو الصـــف المحوري.

بتطبيق قواعد التحويل نحصل على الجدول التالي:

المتغيرات الاساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	**الثوابت**
X_3	1	0	1	0	0	4
X_1	0	1	0	1	0	6
X_5	3	0	0	−2	1	6
-f(x)	3	0	0	−5	0	−30

الحل الجديد هو:

(متغيرات غير اساسية) $X_1 = 0$, $X_4 = 0$

(متغيرات اساسية) $X_3 = 4$, $X_2 = 6$, $X_5 = 6$

$f(x) = 30$

نختبر امثلية الحل :

بما ان احد معاملات دالة الهدف في الصف الاخير موجبا، لايكون هذا الحل امثلا ونبحث عن حل اخر افضل:

المتغير الداخل هو X_1، لانه صاحب المعامل الموجب، ويكون عموده هو العمود المحوري، بقسمة عناصر عمود الثوابت كل على نظيره (الموجب فقط) في العمود المحوري نحصل على النسب التالية: $\frac{4}{1}$ ، $\frac{6}{3}$، فيكون X_5 هو المتغير الخارج لانه صاحب اقل نسبة، ويكون صفه هو الصف المحوري، وبتطبيق قواعد التحويل نحصل على الجدول التالي:

المتغيرات الاساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الثوابت
X_3	0	0	1	2/3	-1/3	2
X_1	0	1	0	1	0	6
X_5	1	0	0	−2/3	1/3	2
-f(x)	0	0	0	−3	−1	−36

الحل الجديد هو:

(متغيرات غير اساسية) $X_4 = 0$, $X_5=0$

(متغيرات اساسية) $X_1 = 2$, $X_2 = 6$, $X_3 = 2$

$f(x) = 36$

نختبر امثلية الحل:

بما ان جميع المعاملات في الصف الاخير غير موجبة يكون هذا الحل هو الحل الامثل.

مثال 2:

اوجد كل من

$$X_1 \geq 0$$
$$X2 \geq 0$$

التي تعظم الدالة:

$$f(x) = 2X_1 + X_2$$

بشرط ان:

$$3X_1 - 2X_2 \leq 12$$
$$X_1 - 5X_2 \leq 2$$
$$- X_1 + 2X_2 \leq 4$$

الحـل:

نحول المتباينات الى معادلات باضـــافة المتغيرات المتممة غير الســـالبة X_5،X_4،X_3 فنحصـــل على:

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 = 12$$
$$X_1 - 5X_2 + X_4 = 2$$
$$-X_1 + 2X_2 + X_5 = 4$$

باتباع قواعد التحويل يمكننا ان نصل الى الحل الامثل حسب طريقة سمبلكس من الجدول الشامل التالي:

المتغيرات الاساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الثوابت
X_3	3	−2	1	0	0	12
X_1	1	−5	0	1	0	2
X_5	−1	2	0	0	1	4
-f(x)	2	1	0	0	0	0
X_3	0	13	1	-3	0	6
X_1	1	−5	0	1	0	2
X_5	0	−3	0	1	1	6
-f(x)	0	11	0	−2	0	−4
X_2	0	1	1/13	−3/13	0	6/13
X_1	1	0	5/13	−2/13	0	56/13
X_5	0	0	3/13	4/13	1	96/13
-f(x)	0	0	−11/13	7/13	0	−118/13
X_2	0	1	1/4	0	3/4	6
X_1	1	0	1/2	0	1/2	8
X_4	0	0	3/4	1	13/4	24
-f(x)	0	0	−5/4	0	-7/4	−22

∴ يكون الحل الامثل هو:

(متغيرات اساسية) $X_1 = 8$, $X_2 = 6$, $X_4 = 28$

(متغيرات غير اساسية) $X_3 = 0$, $X_5 = 0$

$f(x) = 22$

5.7 مسائل محلولة بطريقة السمبلكس الجبرية

Solved problems using algebraic simplex method

1. باستخدام طريقة السمبلكس اوجد قيم X_1، X_2 التي تعظم الدالة $f(x) = 2X_1 + X_2$ بشرط ان:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$
$$X_1 + X_2 \leq 8$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

ثم اختبر الحل بيانيا.

الحل:

I. نحول القيود الى معادلات باضافة متغيرات غير سالبة هي X_3، X_4 فتصبح.

$$\left.\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 + X_3 \quad &= 18 \\ X_1 + X_2 + \quad + X_4 &= 8 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(1)$$

II. نجد الحل المبدئي الاساسي الممكن وذلك بجعل المتغيرات المتممة متغيرات اساسية.

$$\left.\begin{aligned} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ متغيرات غير اساسية

III. نكتب المتغيرات الاساسية ودالة الهدف بدلالة المتغيرات غير الاساسية.

$$\left.\begin{aligned} X_3 &= 18 - 3X_1 - 2X_2 \\ X_4 &= 8 - X_1 - X_2 \end{aligned}\right\} \text{..................(2)}$$

$$f(x) = 2X_1 + X_2 \quad \Big\} \text{....................(3)}$$

ويكون الحل المبدئي هو:

متغيرات غير اساسية $X_1 = 0$, $X_2 = 0$

متغيرات اساسية $X_3 = 18$, $X_4 = 8$

$f(x) = 0$

IV. نختبر الحل بالرجوع الى معادلة دالة الهدف (3)، بما ان X_1،X_2 موجبة، ∴ هذا الحل ليس امثلا.

V. نبحث عن حل اخر افضل

المتغير الداخل: هو صاحب اكبر معامل موجب في دالة االهدف فيكون هو X_1

المتغير الخارج: هو الذي يصل الصفر اولا مع زيادة X_1

$X_1 = 6$ عندما $X_3 = 0$

$\Big\{ X_2 = 0$ مازال $\Big\}$

$X_1 = 8$ عندما $X_4 = 0$

X_3 هو المتغير الخارج

في الحل الجديد

متغيرات غير اساسية X_2 ، X_3

متغيرات اساسية X_4 ، X_1

نعبر عن المتغيرات الاساسية ودالة الهدف بدلالة المتغيرات غير الاساسية:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= 6 - 2/3X_2 - 1/3X_3 \\ X_4 &= 8 - (6-2/3X_2 - 1/3X_3) - X_2 \\ &= 2 - 1/3X_2 + 1/3X_3 \end{aligned}\right\} \text{..........................(4)}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 2(6 - 2/3X - 1/3X_3) + X_2 \\ &= 12 - 1/3X_2 - 1/3X_3 \end{aligned}\right\} \text{............................(5)}$$

∴ الحل الجديد هو

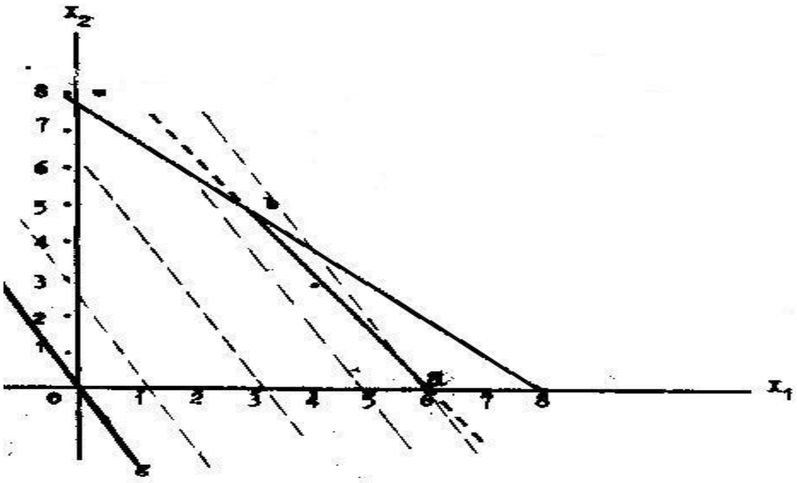
متغيرات غير اساسية $X_3 = 0 \ , \ X_2 = 0$

متغيرات اساسية $X_1 = 6 \ , \ X_4 = 2$

$f(x) = 12$

نختبر الحل فنجده امثلا لان معاملات المتغيرات في دالة الهدف جميعها سالبة.

اختبار الحل بيانيا:



بتحريك المستقيم الممثل لاتجاه الدالة fg بشكل مواز لنفسه تكون النقطة a هي اخر نقطة يلامسها.

$a = (6 , 0)$

تكون

$X_1 = 6$

$X_2 = 0$

$f(x) = 12$

2. باستخدام طريقة السمبلكس حل السؤال الثالث من اسئلة الفصل الاول.

الحـل:

بعد تكوين النموذج الرياضي وهو:

ايجاد قيم X_1، X_2 التي تعظم الدالة $f(x) = 10X_1 + 20X_2$ بشرط ان:

$2X_1 + X_2 \leq 20$

$2X_1 + 3X_2 \leq 30$

وان

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

- نحول القيود الهيكلية الى معادلات باضـــافة متغيرات متممة غير ســـالبة وهي X_3، X_4

فتصبح كمايلي:

$$\left.\begin{aligned} 2X_1 + X_2 + X_3 \quad &= 20 \\ 2X_1 + 3X_2 + \quad X_4 &= 30 \end{aligned}\right\} \text{.....................(1)}$$

– نجد الحل المبدئي وذلك بجعل المتغيرات المتممة متغيرات اساسية فتكون:

متغيرات غير اساسية $\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$

متغيرات اساسية $\left\{\begin{aligned} X_3 &= 20 - 2X_1 - X_2 \\ X_4 &= 30 - 2X_1 - 3X_2 \end{aligned}\right\}$ **.....................(2)**

$$f(x) = 10X_1 + 20X_2 \quad \} \text{ ....(3)}$$

فيكون الحل المبدئي

$X_1 = 0$, $X_2 = 0$

$X_3 = 20$, $X_4 = 30$

$f(x) = 0$

نختبر الحل فنجده غير امثل لكون X_1، X_2 موجبه في دالة الهدف(3) **لنبحث عن حل افضل:**

المتغير الداخل : هو X_2 لانه صاحب اكبر معامل موجب في دالة الهدف

المتغير الخارج: $X_2 = 20$ عندما $X_3 = 0$

$X_2 = 10$ عندما $X_4 = 0$

X_4 هو المتغير الخارج

في الحل الجديد:

X_1 ، X_4 متغيرات غير اساسية

X_2 ، X_3 متغيرات اساسية

نكتب المتغيرات الاساسية ودالة الهدف بدلالة المتغيرات غير الاساسية فمن (2)

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= 10 - 2/3X_1 - 1/3X_4 \\ X_3 &= 20 - 2X_1 - (10 - 2/3X_1 - 1/3X_4) \\ &= 10 - 4/3X_1 + 1/3X_4 \end{aligned}\right\} \text{.........................(4)}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 10X_1 + 20(10 - 2/3X_1 - 1/3X_4) \\ & 200 - 10/3\, X_1 - 20/3X_4 \end{aligned}\right\} \text{................................(5)}$$

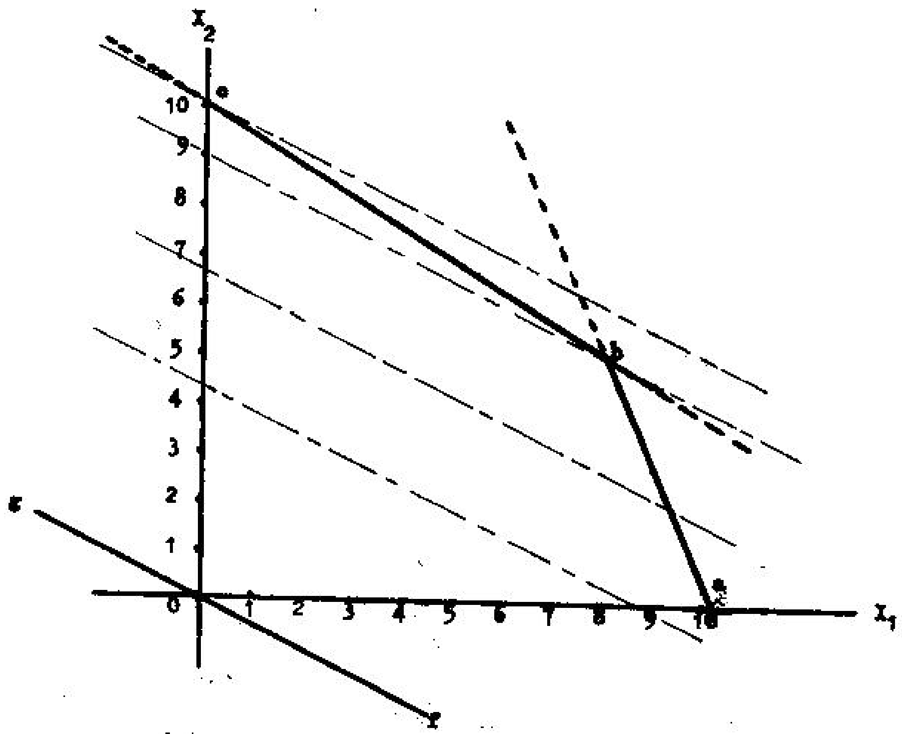
الحل الجديد هو:

(متغيرات غيراساسية) $X_4 = 0 \;,\; X_1 = 0$

(متغيرات اساسية) $X_3 = 10 \;,\; X_2 = 10$

$f(x) = 200$

باختبار الحل نجد انه حل امثل لان المعاملات سالبة في دالة الهدف (5)



بتحريك المســـتقيم fg الذي يمثل دالة الهدف تكون النقطة C هي اخر نقطة يلامســـها في المضـــلع Oabc وتكون نقطة النهاية العظمى.

$$C = (x1 = 0 \quad , \quad x2 = 10)$$

وتكون عندها

$$f(x) = 200$$

الفصل الثامن

طريقة السمبلكس (SIMPLEX)

القسم الثاني

درسنا في الفصل السابق طرق تطبيق طريقة السمبلكس في مسائل البرمجة الخطية ذات القيود الهيكلية من نوع اقل من او تساوي، في هذا الفصل سندرس طرق استخدام طريقة السمبلكس لحل المسائل التي تحتوي على قيود هيكلية من النوع اكبر من او تساوي ومن النوع تساوي ومن النوع المزيج او الخليط من الانواع الثلاثة.

1.8 حل مســـائل البرمجة الخطية ذات القيود الهيكلية من النوع اكبر من او تساوي

Solve linear programming problems with structural constraints of type greater than or equal to

نفرض ان المطلوب هو ايجاد النهاية الصغرى(او الكبرى) للدالة :

$$f(x) = C_1X_1 + C_2X_2 \text{ ....(1)}$$

بشرط ان:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \geq b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 \geq b_3 \end{aligned}\right| \text{ ....(2)}$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

في هذه الحالة نحول المتباينات الى متســـــاويات وذلك بطرح المتغيرات المتممة غير الســــالبة

Complementary Variables X_3 ،X_4،X_5 فتصبح القيود على الصورة التالية:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 - X_3 &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 - X_4 &= b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 - X_5 &= b_3 \end{aligned}\right| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$X_j \geq 0$$

$$J = 1, 2,....,\mathbf{5}$$

فاذا اخذنا X_1، X_2 كمتغيرات غير اساسية اي تساوي الصفر فان:

$$X_3 = -b_1$$

$$X_4 = - b_2$$

$$X_5 = - b_3$$

وهذا حل اساسي مبدئي ولكنه غير مسموح به، لانه يخالف القيود غير السالبة، حيث قيم X_3 ،X_4،X_5 سالبة ولذلك لا نختار حلا مبدئيا.

وللتغلب على ذلك نضــيف متغيرات اخرى غير ســالبة وهي X_6،X_7،X_8 ويطلق عليها اســم المتغيرات الصناعية Industrial Variables، وهي متغيرات مساعده فقط ولاوجود لها في اصل المشكلة، فتصبح المعادلات(3) على الصورة التالية:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 - X_3 + X_6 &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 - X_4 + X_7 &= b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 - X_5 + X_8 &= b_3 \end{aligned}\right| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

فاذا اخذنا X_1 ، X_5،X_4،X_3،X_2 متغيرات غير اساسية اي تساوي الصفر فان:

$$\left.\begin{array}{l} X_6 = b_1 \\ X_7 = b_2 \\ X_8 = b_3 \end{array}\right| \quad \text{تكون متغيرات اساسية}$$

وهذا حل اساسي مسموح به، ولكنه ليس هو الحل لمجموعة القيود الهيكلية الاصلية، لان X_6 ،X_7،X_8 لا وجود لها في المجموعة (2) ومع هذا يعتبر بداية للحل باستخدام طريقة السمبلكس.

وللوصول الى حل اساسي ومسموح به وفي نفس الوقت يحقق القيود الاصلية، يجب ان تؤول المتغيرات الصناعية الى صفر، لذلك سنفترض ان:

$$\mathbf{W = X_6 + X_7 + X_8 \text{ ....} (5)}$$

وحيث ان كل من المتغيرات الصناعية اكبر من الصفر او تساويه فان اقل قيمة للدالة W هي الصفر. ويترتب على ذلك انه عندما تصل قيمة W الى الصفر فان كل من المتغيرات الصناعية يجب ان يكون صفرا.

ويكون اول جزء من الحل هو ايجاد قيم X_5،X_4،X_3،X_2،X_1 التي تجعل قيمة الدالة W اقل مايمكن، يسمى هذا الجزء من الحل بالمرحلة الاولى. وحيث اننا اخترنا X_8،X_7،X_6 متغيرات اساسية فان W يجب التعبير عنها بدلالة المتغيرات غير الاساسية وهي X_5،X_4،X_3،X_2،X_1 وذلك بجمع المعادلات رقم(4) ثم التعويض في المعادلة (5) فنحصل على:

$$X_1 \sum_{i=1}^{3} a_{i1} + X_2 \sum_{i=1}^{3} a_{i2} - X_3 - X_4 - X_5 + W = \sum_{i=1}^{3} b_i$$

ومنها:

$$W = d_1X_1 + d_2X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + W_o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

حيث :

$$d_1 = -\sum_{i=1}^{3} a_{i1}$$

$$d_2 = -\sum_{i=1}^{3} a_{12}$$

$$W_o = \sum_{i=1}^{3} b_i$$

وتكون المسألة:

ايجاد قيم X_1،X_2،X_3،X_4،X_5 التي تجعل قيمة الدالة (6) اقل مايمكن بشرط ان:

$$C_1X_1 + C_2X_2 - f(x) = 0$$
$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 - X_3 + X_6 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 - X_4 + X_7 = b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 - X_5 + X_8 = b_3$$

وان $X_j \geq 0$

$J = 1, 2, \ldots, 8$

يكون جدول السمبلكس الاول كمايلي:

المتغيرات الاساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	b_i
X_6	a_{11}	a_{12}	-1	0	0	1	0	0	b_1
X_7	a_{21}	a_{22}	0	-1	0	0	1	0	b_2
X_8	a_{31}	a_{32}	0	0	-1	0	0	1	b_3
-f(x)	C_1	C_2	0	0	0	0	0	0	0
-W	d_1	d_2	1	1	1	0	0	0	-W

ثم نطبق طريقة السـمبلكس حتى نحصــل على اقل قيمة للدالة W، فاذا كانت اقل قيمة لهذه الدالة اكبر من الصفر لا يكون هناك حل مسموح به وينتهي الحل.

اما اذا كانت اقل قيمة لهذه الدالة تساوي الصفر يكون هناك حل، والجدول النهائي في هذه الحالة يعطي احد الحلول المسموح بها، وعندئذ تختفي X_8،X_7،X_6 كمتغيرات اساسية، وتصبح عناصر الصف الاخير جميعها اصــفارا ماعدا العناصــر التي تقع في الاعمدة التي رؤوســها X_8،X_7،X_6. فقيمة كل منها =1 وتســمى هذه المرحلة بالمرحلة الاولى، والجزء الثاني من الحل هو ان نحذف من الجدول النهائي الســابق كل من الصــــف الاخير الخاص بالدالة W والاعمدة ذات الرؤوس X_8،X_7،X_6. ثم نطبق مرة اخرى طريقة السمبلكس بحيث نجعل قيمة الدالة f(x) (دالة الهدف) التي توصلنا اليها في المرحلة السابقة اكبر او اقل مايمكن حسب المطلوب وتسمى هذه المرحلة بالمرحلة الثانية.

مثال1 :

اوجد قيم X_2،X_1 التي تصغر الدالة $f(x) = 3X_1 + X_2$ بشرط ان:

$$2X_1 + 4X_2 \geq 40$$
$$3X_1 + 2X_2 \geq 50$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

الحـل:

بطرح المتغيرات المتممة واضافة المتغيرات الصناعية نحصل على:

$$2X_1 + 4X_2 - X_3 + X_5 = 40$$
$$3X_1 + 2X_2 - X_4 + X_6 = 50$$

بالجمع

$$5X_1 + 6X_2 - X_3 - X_4 + \underbrace{X_5 + X_6}_{W} = 90$$

$$W = 90 - 5X_1 - 6X_2 + X_3 + X_4$$

تكون المشكلة الجديدة هي ايجاد قيم X_1،X_2،X_3،X_4 التي تصغر الدالة W

بشرط ان:

$$2X_1 + 4X_2 - X_3 + X_5 = 40$$
$$3X_1 + 2X_2 - X_4 + X_6 = 50$$
$$f(x) = 3X_1 + X_2$$

ويتم الحل جدوليا كمايلي:

متغيرات اساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	الثوابت
X_5	2	4	−1	0	1	0	40
X_6	3	2	0	−1	0	1	50
-f(x)	3	1	0	0	0	0	0
-W	−5	−6	1	1	0	0	−90
X_2	1/2	1	−1/4	0	1/4	0	10
X6	2	0	1/2	−1	−1/2	1	30
-f(x)	5/2	0	1/4	0	−1/4	0	−10
-W	−2	0	−1/2	1	3/2	0	−30
X_2	0	1	−3/8	1/4	3/8	−1/4	5/2
X_1	1	0	1/4	−1/2	−1/4	1/2	15
-f(x)	0	0	−3/8	5/4	3/8	−5/4	−95/2
-W	0	0	0	0	1	1	0

ان النهاية الصــغرى للدالة W تســاوي الصــفر اي ان هناك حل للمشكلة نشـطب الصــف الاخير W والعمودين X_5، X_6

وبهذا تنتهي المرحلة الاولى.

المرحلة الثانية نعود الى المشكلة الاصلية، ويكون اخر جدول حصلنا عليه هو الجدول الاول في الحل للحصول على النهاية الصغرى لدالة الهدف f(x)، وبهذا يكون الجدول الاولى للحل هو التالي:

متغيرات اساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	الثوابت
X2	0	1	−3/8	1/4	5/2
X1	1	0	1/4	−1/2	15
-f(x)	0	0	−3/8	5/4	−95/2
X2	3/2	1	0	−1/2	25
X3	4	0	1	−2	60
-f(x)	3/2	0	0	1/2	−25

بتطبيق طريقة السمبلكس لتصغير الدالة f(x) يكون X_3 هو المتغير الداخل، لانه صاحب اكبر معامل سالب في دالة الهدف، ويكون X_1 هو المتغير الخارج، وباستخدام قواعد التحويل نصل الى الحل الامثل وهو:

$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 25$$
$$f(x) = 25$$

ملاحظة:

لوكان المطلوب هو ايجاد قيم X_2،X_1 التي تعظم دالة الهدف f(x) فاننا نتبع نفس الخطوات السابقة حتى نحصل على المرحلة الاولى، ثم نطبق طريقة السمبلكس فيكون X_4 هو المتغير الداخل و X_2 هو المتغير الخارج ونكمل الحل.

مثال 2:

اوجد قيم X_1،X_2،X_3 التي تصغر الدالة $f(x) = 4X_1 + 8X_2 + 3X_3$ بشرط ان:

$$X_1 + X_2 \geq 2$$
$$2X_2 + X_3 \geq 5$$

وان

$$X_j \geq 0$$
$$j = 1,2,3.$$

الحل:

بطرح المتغيرات المتممة X_4،X_5 واضافة المتغيرات الصناعية X_6،X_7 تصبح القيود الهيكلية كمايلي:

$$X_1 + X_2 - X_4 + X_6 = 2$$
$$2X_2 + X_3 - X_5 + X_7 = 5$$
$$X_j \geq 0$$
$$j = 1,2,\ldots,7$$

دع

$$W = X_6 + X_7$$

بجمع المعادلتين نحصل على:

$$X_1 + 3X_2 + X_3 - X_4 - X_5 + W = 7$$

$$W = 7 - X_1 - 3X_2 - X_3 + X_4 + X_5$$

بتطبيق طريقة السمبلكس نحصل على الجداول التالية:

متغيرات اساسية	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**الثوابت**
X_6	1	1	0	−1	0	1	0	2
X_7	0	2	1	0	−1	0	1	5
-f(x)	4	8	3	0	0	0	0	0
-W	−1	−3	−1	1	1	0	0	−7
X_2	1	1	0	−1	0	1	0	2
X_7	−2	0	1	2	−1	−2	1	1
-f(x)	−4	0	3	8	0	−8	0	−16
-W	2	0	−1	−2	1	3	0	−1
X_2	0	1	1/2	0	−1/2	0	1/2	5/2
X_4	−1	0	1/2	1	−1/2	−1	1/2	1/2
-f(x)	4	0	−1	0	4	0	−4	−20
-W	0	0	0	0	0	1	1	0

بما ان النهاية الصــغرى للدالة W تســاوي الصــفر ننتقل الى المرحلة الثانية من الحل، فنحذف الســطر الاخير والاعمدة X_6 ،X_7 ونكمل الحل انطلاقا من الجدول الاخير الذي وصـــلنا اليه، فنحصـــل على الجداول التالية:

متغيرات اساسية	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**الثوابت**
X_2	0	1	1/2	0	−1/2	5/2
X_4	−1	0	1/2	1	−1/2	1/2
-f(x)	4	0	−1	0	4	−20
X_2	1	1	0	−1	0	2
X_3	−2	0	1	2	−1	1
-f(x)	2	0	0	2	3	−19

الحل الامثل هو

(متغيرات غير اساسية) $X_1 = X_4 = X_5 = 0$

(متغيرات اساسية) $X_2 = 2$, $X_3 = 1$

$f(x) = 19$

2.8 حـل مســــائـل البرمجـة الخطيـة ذات القيود الـهيكليـة من النوع تساوي=

Solving linear programming problems with structural constraints of type=

نفرض ان المشكلة في الصورة العامة التالية:

ايجاد قيم $X_1,X_2,...,X_r$ التي تجعل قيمة الدالة $f(x) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$ اقل او اكبر مايمكن بشرط ان:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

لحل هذه المشكلة يوجد اسلوبان او اتجاهان:

الاتجاه الاول:

بما اننا لسـنا بحاجة الى اي متغير متمم فاننا نبدأ باضـافة المتغيرات الصـناعية $X_{n+1}, X_{n+2},...,X_{m+n}$، ونكمل الحل بنفس الاسلوب المتبع في حالة كون القيود الهيكلية على صورة اكبر من او تساوي.

الاتجاه الثاني:

نســتبدل القيود الهيكلية بمجموعة مكافئة من المعادلات بها m متغيرات اســاســية بحيث تكـــــون هذه المتغيرات 1 في احدى المعادلات وصفرا في باقي المعادلات فنحصل على مجموعة المعادلات التالية:

$$
\begin{array}{llllllll}
\mathbf{X_1} & & + \mathbf{a_{1,m+1}X_{m+1}} & + \dots + & \mathbf{a_{1n}X_n} & = \mathbf{b_1} \\
& \mathbf{X_2} & + \mathbf{a_{2,m+1}X_{m+1}} & + \dots + & \mathbf{a_{2n}X_n} & = \mathbf{b_2} \\
. & & . & . \quad \dots & . & . \\
& . & . & . \quad \dots & . & . \\
& \mathbf{X_m} & + \mathbf{a_{m,m+1}X_{m+1}} & + \dots + & \mathbf{a_{mn}X_n} & = \mathbf{b_m}
\end{array}
$$

وتدعى هذه الصــورة بالصــورة القانونية Canonical From، ثم نعبر عن دالة الهدف بدلالة المتغيرات غير الاساسية ونطبق طريقة السمبلكس كالمعتاد.

مثال 3:

اوجد قيم X_1،X_2،X_3،X_4 التي تصغر الدالة $f(x) = 2X_1 + 3X_2 + X_3 - X_4$ بشرط ان:

$$X_1 + X_2 + 3X_3 - X_4 = 13$$

$$-X_1 + X_2 + X_3 - 3X_4 = 1$$

وان

$$X_j \geq 0$$

$$(j = 1,2,3,4)$$

الحـل بالاسلوب الاول:

نضيف المتغيرات الصناعية X_5، X_6

نجعل $W = X_5 + X_6$ ثم نجمع القيود فنحصل على

$$2X_2 + 4X_3 - 4X_4 + \underbrace{X_5 + X_6}_{W} = 14$$

ومنها

$$W = 14 - 2X_2 - 4X_3 + 4X_4$$

متغيرات اساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	الثوابت
X_5	1	1	3	−1	1	0	13
X_6	−1	1	1	−3	0	1	1
-f(x)	2	3	1	−1	0	0	0
-W	0	−2	−4	4	0	0	−14
X_5	4	−2	0	8	1	−3	10
X_3	−1	1	1	−3	0	1	1
-f(x)	3	2	0	2	0	−1	−1
-W	−4	2	0	−8	0	4	−10
X_4	1/2	−1/4	0	1	1/8	−3/8	5/4
X_3	1/2	1/4	1	0	3/8	−1/8	19/4
-f(x)	2	5/2	0	0	−1/4	−1/4	−7/2
-W	0	0	0	0	1	1	0

بما ان النهاية الصـغرى للدالة W تسـاوي صـفر يكون هناك حل ممكن للمسـألة، لهذا نشـطب او نحذف السطر الاخير والاعمدة X_6،X_5 ونكمل الحل حسب طريقة السمبلكس.

المطلوب هو تصـغير الدالة f(x)، واذا ما نظرنا الى صـف الدالة f(x) نجد ان جميع المعاملات المتبقية بعد الحذف غير سـالبة وهذا يعني ان الجدول الاخير يعطي الحل الامثل ولاداعي للاسـتمرار في الحل.

ويكون الحل الامثل هو:

$X_1 = 0 \ , \ X_2 = 0$ (متغيرات غير اساسية)

$X_3 = 19/4 \ , \ X_4 = 5/4$ (متغيرات اساسية)

$f(x) = 7/2$

الحل بالاسلوب الثاني

نعوض عن القيود بمجموعة مكافئة من المعادلات بها متغيرين اساسيين، اي نستبدل القيود بقيود قانونية مكافئه، وللحصول على ذلك نجمع القيدين فنحصل على:

$$X_2 + 2X_3 - 2X_4 = 7$$

ونطرحهما فنحصل على:

$$X_1 + X_3 + X_4 = 6$$

وبهذا فان القيدين الهيكلين تحولا الى الصورة القانونية:

$$\begin{aligned} X_1 \quad + X_3 + X_4 &= 6 \\ X_2 + 2X_3 + 2X_4 &= 7 \end{aligned}$$

بمتغيرات اساسية X_2،X_1

ولتطبيق طريقة السمبلكس نكتب دالة الهدف بدلالة المتغيرات غير الاساسية X_4،X_3

$$X_1 = 6 - X_3 - X_4$$
$$X_2 = 7 - 2X_3 - 2X_4$$

فأن

$$\begin{aligned} f(x) &= 2X_1 + 3X_2 - X_3 - X_4 \\ &= 2(6 - X_3 - X_4) + 3(7 - 2X_3 - 2X_4) - X_3 - X_4 \\ &= 33 - 7X_3 + 3X_4 \end{aligned}$$

وتصبح المسألة ايجاد قيم X_4،X_3 التي تصغر الدالة $f(x) = 33 - 7X_3 + 3X_4$ بشرط ان:

$$\begin{aligned} X_1 \quad + X_3 + X_4 &= 6 \\ X_2 + 2X_3 + 2X_4 &= 7 \end{aligned}$$

وان $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

متغيرات اساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	الثوابت
X_1	1	0	1	1	6
X_2	0	1	2	−2	7
-f(x)	0	0	−7	3	−33
X_1	1	−1/2	0	2	5/2
X_3	0	1/2	1	−1	7/2
-f(x)	0	7/2	0	−4	−17/2
X_4	1/2	−1/4	0	1	5/4
X_3	1/2	1/4	1	0	19/4
-f(x)	2	5/2	0	0	−7/2

معاملات دالة الهدف في الصف الاخير غير سالبة وعليه يكون الحل امثلا، وهذا الحل هو:

(متغيرات غير اساسية) $X_1 = o \; , \; X_2 = 0$

(متغيرات اساسية) $X_3 = 19/4 \; , \; X_4 = 5/4$

$f(x) = 7/2$

ملحوظة: يمكننا ان نعوض او نستبدل القيود الهيكلية التي على صوره تساوي كل قيد بقيدين متعاكسين احدهما اكبر والاخر اصغر، فمثلا القيد $3X_1 + 2X_2 = 18$ يصبح او يستبدل بقيدين هما:

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$

و

$3X_1 + 2X_2 \geq 18$

ويتم الحل حسب طريقة حل المسائل ذات النوع المخطط التي سيأتي شرحها في الجزء القادم، لكن هذا الاسلوب يزيد من عدد القيود ويطيل بالتالي العمليات الحسابية.

3.8 حل مسائل البرمجة الخطية ذات القيود من النوع الخليط

Solving linear programming problems with constraints of a mixture type

في هذا الجزء سنعالج مسائل البرمجة الخطية التي تكون قيودها الهيكلية مزيج من المتباينات والمعادلات، اي مزيج من الانواع الثلاثة التي درسناها وهي: اكبر من او تساوي واصغر من او تساوي وتساوي ($\geq$، $\leq$، =)، مع الافتراض بان الثوابت غير سالبة.

في مثل هذه المسائل نحول القيود الى معادلات باستخدام المتغيرات المتممة والصناعية حسب نوع القيد، ثم نطبق قواعد طريقة السمبلكس كالمعتاد.

مثال 4:

اوجد قيم X_1،X_2 التي تصغر الدالة $f(x) = 2X_1 + 4X_2$ بشرط ان:

$$X_1 + X_2 \leq 8$$
$$6X_1 + 4X_2 \geq 12$$
$$X_1 + 4X_2 = 20$$

وأن

$$X1 \geq 0$$
$$X2 \geq 0$$

الحل:

نحول القيود الى معادلات باستخدام المتغيرات المتممة والصناعية فتصبح المشكلة:

تصغير الدالة $f(x) = 2X_1 + 4X_2$ بشرط ان:

$$X_1 + X_2 + X_3 \qquad\qquad\qquad = 8$$
$$6X_1 + 4X_2 \qquad - X_4 + X_5 \qquad = 12$$
$$X_1 + 4X_2 = 20$$
$$X_1 + 4X_2 + \qquad\qquad\qquad X_6 = 20$$

وأن

$$X_j \quad \geq 0$$
$$J = 1, 2, \ldots, 6$$

دع $X_5+X_6=W$

$$\therefore W = 32 - 7X_1 - 8X_2 + X_4$$

تكون الجداول المتعاقبة لحل المرحلة الاولى هي كما يلي:

المتغيرات الاساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	الثوابت
X_3	1	1	1	0	0	0	8
X_5	6	4	0	−1	1	0	12
X_6	1	4	0	0	0	1	20
-f(x)	2	4	0	0	0	0	0
-W	−7	−8	0	1	0	0	−32
X_3	−1/2	0	1	1/4	−1/4	0	5
X_2	3/2	1	0	−1/4	1/4	0	3
X_6	−5	0	0	1	−1	1	8
-f(x)	−4	0	0	1	−1	0	−12
-W	5	0	0	−1	2	0	−8
X_3	3/4	0	1	0	0	−1/4	3
X_2	1/4	1	0	0	0	1/4	5
X_4	−5	0	0	1	−1	1	8
-f(x)	1	0	0	0	0	−1	−20
-W	0	0	0	0	1	1	0

بما ان النهاية الصـغرى للدالة W تساوي الصفر ينتهي حل المرحلة الاولى، ويكون هناك حل امثل لهذه المشـــكلة، ننتقل الى حل المرحلة الثانية للوصـــول الى الحل الامثل، ويكون الجدول الاخير في المرحلة الاولى هو الجدول الاول في المرحلة الثانية وهو:

متغيرات اساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	الثوابت
X_3	3/4	0	1	0	3
X_2	1/4	1	0	0	5
X_4	−5	0	0	1	8
-f(x)	1	0	0	0	−20

المعاملات في دالة الهدف بالصف الاخير غير سالبة وبناء عليه فان هذا الحل هو الحل الامثل وهو:

$$X_1 = 0 \quad , \quad X_2 = 5$$
$$f(x) = 20$$

ملحوظة:

لو كانت المشكلة تعظيم دالة الهدف فاننا نطبق قواعد السمبلكس، فيكون X_1 هو المتغير الداخل وعموده هو العمود المحوري، وX_3 هو المتغير الخارج وصفه هو الصف المحوري، ومن الجدول الاخير نحصل على الجدول التالي:

متغيرات اساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	الثوابت
X_1	1	0	4/3	0	4
X_2	0	1	−1/3	0	4
X_4	0	0	20/3	0	−24
-f(x)	0	0	−4/3	0	−24

جميع معادلات دالة الهدف في الصف الاخير غير موجبة وبهذا يكون هذا الحل هو الحل الامثل وهو:

$$X_1 = 4 \quad , \quad X_2 = 4$$

$$f(x) = 24$$

مثال 5:

اوجد قيم X_1،X_2، X_3 التي تصغر الدالة $f(x) = X_1 + 3X_2 - X_3$ بشرط ان:

$$-X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 5$$

$$2X_1 - X_2 + X_3 \leq 6$$

$$-X_1 - 3X_2 + 5X_3 \geq 20$$

وان

$$X_j \geq 0$$

$$J = 1,2,3$$

الحل:

باستخدام المتغيرات المتممة والصناعية نحول القيود الى معادلات، وتصبح المشكلة تصغير الدالة

$f(x) = X_1 + 3X_2 - X_3$ بشرط ان:

$$-X_1 - X_2 + 2X_3 + X_4 = 5$$

$$2X_1 - X_2 + X_3 + X_5 = 6$$

$$-X_1 - 3X_2 + 5X_3 - X_6 + X_7 = 20$$

وأن

$$X_j \geq 0$$

$$j = 1, 2, ..., 7$$

دع

$$W = X_7$$

$$\therefore W = 20 + X_1 + 3X_2 - 5X_3 + X_6$$

وتصبح الجداول المتلاحقة لايجاد حل المرحلة الاولى اي لايجاد النهاية الصغرى للدالة W هي كما يلي:

متغيرات اساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	الثوابت
X_4	−1	−1	2	1	0	0	0	5
X_5	2	−1	1	0	1	0	0	6
X_7	−1	−3	5	0	0	−1	1	20
-f(x)	1	3	−1	0	0	0	0	0
-W	1	3	−5	0	0	1	0	−20
X_3	−1/2	−1/2	1	1/2	0	0	0	5/2
X_5	5/2	−1/2	0	−1/2	1	0	0	7/2
X_7	3/2	−1/2	0	−5/2	0	−1	1	15/2
-f(x)	1/2	5/2	0	1/2	0	0	0	5/2
-W	−3/2	11/2	0	5/2	0	1	0	−15/2
X_3	0	−3/5	1	2/5	1/5	0	0	16/5
X_1	1	−1/5	0	−1/5	2/5	0	0	7/5
X_7	0	−1/5	0	−11/5	−3/5	−1	1	27/5
-f(x)	0	13/5	0	3/5	−1/5	0	0	9/5
-W	0	26/5	0	11/5	3/5	1	0	27/5

نرى بان جميع معاملات الدالة W في الصــف الاخير غير ســالبة، وهذا يعني ان الدالة W في نهايتها الصغرى، ولكن وبما ان النهاية الصغرى للدالة W هي 27/5 اي اكبر من الصفر فهذا يعني انه لايوجد حل امثل للمشكلة وينتهى الحل.

4.8 مسائل على طريقة السمبلكس

1. حل المسألة التالية بطريقة السمبلكس:

ينتج احد مصــانع لعب الاطفال نوعين من اللعب هما B،A ومعطيات الانتاج موجودة في الجدول التالي:

المنتج / المرحلة	A	B	الوقت المتاح
التصميم	10	5	80
الدهان	6	6	66
الانجاز	5	6	90
ربح الوحدة	1.2	1.0	

فكم يجب ان ينتج من كل نوع ليحقق اكبر ربح ممكن؟

2. حل تمارين الفصل الاول جميعها باستخدام طريقة السمبلكس

3. اوجد قيم X_1، X_2 التي تعظم الدالة $f(x) = 2X_1 + X_2$ بشرط ان:

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$
$$X_1 + X_2 \leq 6$$
$$X_1 - X_2 \leq 2$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

4. اوجد قيم X_1، X_2 التي تعظم الدالة $f(x) = 2X_1 + X_2$ بشرط ان:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$
$$X_1 + X_2 \leq 8$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

5. اوجد قيم X_1، X_2 التي تعظم الدالة $f(x) = 4X_1 - 2X_2$ بشرط ان:

$$-2X_1 + 2X_2 \geq -12$$
$$X_1 - 4X_2 \leq 2$$
$$X_1 - 2X_2 \geq -4$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

6. اوجد قيم X_1، X_2 التي تعظم الدالة $f(x) = 3X_1 + 5X_2$ بشرط ان:

$$X_1 \geq 3$$
$$X_2 \leq 4$$
$$X_1 + X_2 \leq 5$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

7. اوجد قيم X_1،X_2،X_3،X_4 التي تعظم الدالة $f(x) = 2X_1 - X_2 + X_4$ بشرط ان:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 8$$
$$2X_2 - X_3 \leq 4$$
$$2X_1 - X_2 - X_4 \leq 2$$

وان

$$X_j \geq 0$$
$$j = 1,2,3$$

8. اوجد قيم X_1،X_2،X_3 التي تصغر الدالة $f(x) = 4X_1 + 8X_2 + 3X_3$ بشرط ان:

$$X_1 + X_2 \geq 2$$
$$2X_2 + X_3 \geq 5$$

وان

$$X_j \geq 0$$
$$j = 1,2,3$$

9. اوجد قيم X_1،X_2 التي تصغر الدالة $f(x) = X_1 + X_2$ بشرط ان:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 10$$
$$2X_2 - X_3 - X_4 \geq 2$$
$$X_2 - 2X_3 + 2X_4 \geq 6$$

وان

$$X_j \geq 0$$
$$j = 1,2,3,4$$

10. اوجد قيم X1،X2 التي تصغر الدالة $f(x) = 4X_1 + 6X_2$ بشرط ان:

$$2X_1 + 3X_2 \geq 60$$
$$4X_1 + X_2 \geq 40$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

11. اوجد قيم X1،X2 التي تعظم الدالة $f(x) = 6X_1 + 4X_2$ بشرط ان:

$$X_1 + 2X_2 = 8$$
$$2X_1 + X_2 = 10$$
$$X_1 = 4$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

12. حل المسألة التالية لتعظيم الدالة $f(x) = -2X_4 - X_5 + X_6$ بشرط ان:

$$
\begin{aligned}
- X_2 + 2X_3 + X_4 &= 5 \\
X_1 + 2X_2 - 2X_3 \quad + X_5 &= 4 \\
-X_1 + X_2 \quad + X_6 &= 6 \\
X_1 &= 4
\end{aligned}
$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$j = 1, 2, \dots, 6$$

13. حول:

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 &= 2 \\
X_1 - 2X_2 - X_3 + 2X_4 &= 3 \\
X_1 \quad + 3X_4 &= 9
\end{aligned}
$$

الى الصيغة القانونية بدلالة X_3،X_2،X_1

14. حول الى الصيغة القانونية بدلالة X_2،X_1 ثم حل المسألة التالية بطريقة السمبلكس لتصغير الدالة $f(x) = X_1 + X_2 + X_3$ بشرط ان:

$$
\begin{aligned}
2X_1 - X_2 + X_3 &= 2 \\
4X_1 + X_2 + X_3 &= 6
\end{aligned}
$$

وان

$$X_j \geq 0$$
$$j = 1,2,3$$

اوجد $X_j \geq 0$ التي تصغر دوال الهدف في التمارين 15−18 التالية:

.15

بشرط ان: $f(x) = 2X_1 - 3X_2 + 6X_3 + X_4 - 2X_5$

$2X_1 - 3X_2 + X_3 + 3X_4 - X_5 = 3$

$X_1 + X_2 - 2X_3 + 9X_4 = 4$

.16

بشرط ان: $f(x) = X_1 - X_2 + 3X_3 + 2X_4 + X_5$

$3X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 + X = 2$

$2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 + 4X_5 = 3$

.17

بشرط ان: $f(x) = -2X_1 - X_2$

$X_1 + X_2 + X_3 = 2$

$X_1 - 3X_2 + X_4 = 3$

.18

بشرط ان: $f(x) = -2X_1 - 5X_2$

$X_1 + X_3 = 4$

$X_1 + 2X_2 + X_4 = 8$

$X_2 + X_5 = 3$

19. اوجد قيم X_1،X_2 التي تصغر الدالة $f(x) = -2X_1 - X_2$ بشرط ان:

$$X_1 + X_2 \leq 2$$
$$X_1 + 3X_2 \geq 3$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

20. اوجد قيم X_1،X_2 التي تصغر الدالة $f(x) = -2X_1 - X_2$ بشرط ان:

$$X_1 + X_2 \geq 2$$
$$X_1 + X_2 \leq 4$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

21. اوجد قيم X_1،X_2، X_3 التي تصغر الدالة $f(x) = X_1 + 3X_2 - X_3$ بشرط ان:

$$-X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 5$$
$$2X_1 - X_2 + X_3 \leq 6$$
$$-X_1 - 3X_2 + 5X_3 \geq 20$$

وان

$$X_j \geq 0$$
$$j = 1,2,3$$

22. اوجد قيم X_1،X_2، X_3 التي تعظم الدالة $f(x) = X_1 - X_2 + 2X_3$ بشرط ان:

$$-2X_1 + 5X_2 - X_3 \geq 10$$
$$-X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 5$$
$$2X_1 - X_2 + X_3 \geq 4$$

وان

$$X_j \geq 0$$
$$j = 1,2,3$$

الفصل التاسع

المشكلة البديلة

Dual Problem

لنأخذ مشكلة الغذاء التالية:

اذا كان كل من المواد الغذائية F_1 ، F_2 يحتوي على نوعين من الفيتامينات وهما A،B وكانت الوحدة الواحدة من F_1 تحتوي على وحدتين من A و 3 وحدات من B، والوحدة الواحدة من F_2 تحتوي على 4 وحدات من A و وحدتين من B، وكان الحد الادنى المتطلب يوميا هو 40 من A و 50 من B، وكانت تكلفة الوحدة الواحدة من المادة F_1 = 3 ومن المادة F_2 = 2.5

اذا رمزنا الى الكمية الواجب شراؤها من المادة F_1 ب X_1

اذا رمزنا الى الكمية الواجب شراؤها من المادة F_2 بـ X_2

يمكننا ان نمثل البيانات اعلاه في الجدول التالي:

الفيتامين	المادة الغذائية		المتطلبات اليومية
	F_1	F_2	
A	2	4	40
B	3	2	50
تكلفة الوحدة الغذائية	3	2.5	

ويكون النموذج الرياضي لهذه المشكلة هو:

تحديد قيم X_1،X_2 التي تجعل دالة الهدف (التكلفة) اقل مايمكن اي التي تصغر دالة الهدف $f(x) = 3X_1 + 2.5X_2$ بشرط ان:

$$2X_1 + 4X_2 \geq 40$$
$$3X_1 + 2X_2 \geq 50$$

وان

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

ندعو هذه المشكلة بالمشكلة الاولية.

دعنا نعتبر ان المواد F_1 ، F_2 تباع في احد محلات المواد الغذائية، وان البائع يدرك ان لهذه المواد قيمة نظراً لاحتوائها على فيتامينات A،B، مشكلة البائع هي تحديد سعر البيع لهذه الفيتامينات، ولنفرض انه Y_1 للوحدة من A, Y_2 للوحدة من B، وان سعر البائع لكل من A،B يجب ان يحدد بحيث يكون سعر المواد من F_1،F_2 يساوي او يقل عن سعر السوق، والا سيخسر البائع الكثير من زبائنه، اي يجب ان يحقق سعر A،B سعرا يقل عن او يساوي 3 ، 2.5 لكل من F_1،F_2 وفي نفس الوقت يسعى البائع الى تعظيم عائداته (اي جعلها اكبر مايمكن)، وبهذا تكون دالة الهدف لديه تعظيم $\phi(y) = 40y_1 + 50y_2$

ويكون النموذج الرياضي لمشكلته هو تحديد قيم y_1،y_2 التي تعظم الدالة $\varphi(y) = 40y_1 + 50y_2$ بشرط ان:

$$2y_1 + 3y_2 \leq 3$$
$$4y_1 + 2y_2 \leq 2.5$$

وان

$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \geq 0$$

تدعى هذه المشكلة **بالمشكلة البديلة** للمشكلة الاولية او المشكلة الاصلية. لاحظ انه اذا اعتبرنا المشكلة الثانية مشكلة اولية تكون المشكلة الاولى هي المشكلة البديلة لها.

لاحظ ايضا ان المشكلة البديلة للمشكلة هي المشكلة الاولية او الاصلية.

مثال 1:

اكتب المشكلة البديلة للمشكلة التالية:

لتعظيم $f(x) = 3X_1 + 5X_2$ بشرط ان:

$$\begin{aligned} X_1 \quad & \leq 4 \\ X_2 & \leq 6 \\ 3X_1 + 2X_2 & \leq 18 \end{aligned}$$

وان

$$\begin{aligned} X_1 \quad & \geq 0 \\ X_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

ننظم المشكلة في الجدول التالي:

	X1	X2		Min
y_1	1	0		4
y_1	0	1		6
Y_3	3	2		18
Max	3	5		

تكون المشكلة البديلة كمايلي:

لتصغير $\phi(y) = 4y_1 + 6y_2 + 18y_3$ بشرط ان:

$$y_1 \qquad + 3y_3 \geq 3$$
$$y_2 + 2y_3 \geq 5$$

وان

$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \geq 0$$

مثال 2:

اذا كانت المشكلة الاولية هي :

تصغير $f(x) = 4X_1 + 8X_2 + 3X_3$ بشرط ان:

$$X_1 + X_2 \geq 2$$
$$2X_2 + X_3 \geq 5$$

وان

$$X_1 \geq 0 \quad , X_2 \geq 0 \quad , X_3 \geq 0$$

الحـل:

تكون المشكلة البديلة هي :

تعظيم $\phi(y) = 2y_1 + 5y_2$ بشرط ان:

$$y_1 \leq 4$$
$$y_1 + 2y_2 \leq 8$$
$$y_2 \leq 3$$

وان

$$y_1 \geq 0 \quad , \quad y_2 \geq 0$$

مثال 3:

اكتب المشكلة البديلة للمشكلة لتالية :

لتعظيم $f(x) = 3X_1 + 5X_2$ بشرط ان:

$$\begin{aligned} X_1 \qquad &= 4 \\ X_2 &= 6 \\ 3X_1 + 2X_2 &= 18 \end{aligned}$$

وان

$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$

الحل:

بما ان معادلة مثل X=a يمكن ان نحل محلها متباينتان وهما:

$$\mathbf{X \leq a \quad , \quad X \geq a}$$

أو

$$\mathbf{-X \leq -a \quad , \quad X \leq a}$$

ولما كان لايجاد المشـكلة البديلة يجب ان تكون جميع القيود من نوع واحد تصـبح المشـكلة الاولية على الصورة التالية لتعظيم $f(x) = 3X_1 + 5X_2$ بشرط ان:

$$\begin{aligned} X_1 \qquad &\leq 4 \\ -X_1 \qquad &\leq -4 \\ X_2 &\leq 6 \\ -X_2 &\leq -6 \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 18 \\ -3X_1 - 2X_2 &\leq -18 \end{aligned}$$

وان

$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$

وتصبح المشكلة البديلة تصغير $\phi(y) = 4y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 6y_4 + 18y_5 - 18y_6$ بشرط ان:

$$y_1 - y_2 \qquad +3y_5 - 3y_6 \geq 3$$
$$y_3 - y_4 + 2y_5 - 2y_6 \geq 5$$

وان

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., 6)$$

يمكننا ان ننقص من عدد المتغيرات اذا افترضنا ان:

$$Z_1 = y_1 - y_2$$
$$Z_2 = y_3 - y_4$$
$$Z_3 = y_5 - y_6$$

بحيث Z_1،Z_2،Z_3 ليس من الضـــروري ان تكون غير ســـالبة، وتصـــبح المشـــكلة البديلة لتصـــغير $\phi(Z) = 4Z_1 + 6Z_2 + 18Z_3$ بشرط ان:

$$Z_1 \qquad + 3Z_3 \geq 3$$
$$Z_2 + 2Z_3 \geq 5$$

وان

Z_1, Z_2, Z_3 غير مقيدة باشارة

ملاحظات:

لايجاد المشكلة البديلة يجب مراعاة مايلي:

1. يجب ان تكون جميع القيود الهيكلية في المشكلة الاصلية من نفس النوع اما $\leq$ او $\geq$

2. اذا كانت المشكلة الاصلية تعظيم يجب ان تكون جميع القيود الهيكلية اقل من او تساوي $\leq$، اما اذا كانت تصغير فيجب ان تكون جميع القيود اكبر من او تساوي $\geq$

ملاحظات اخرى:

1. معاملات دالة الهدف في المشكلة البديلة هي الثوابت في المشكلة الاصلية
2. الثوابت في المشكلة البديلة هي معاملات دالة الهدف في المشكلة الاصلية
3. القيمة المثلى لدالة الهدف في المشكلتين الاصلية والبديلة متساوية
4. ان قيم متغيرات دالة الهدف الاصـــلية هي نفســـها معاملات المتغيرات المتممة في الحل الاخير للمشكلة البديلة.

مثال 4:

حل المشكلة البديلة للمشكلة الاتية لتصغير $f(X) = 30X_1 + 20X_2$ بشرط ان:

$$X_1 + X_2 \leq 8$$
$$5X_1 + 8X_2 = 20$$

وان

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

من حل المشكلة البديلة اوجد قيم X_2،X_1

الحـل:

بما ان المشـــكلة تصـــغير اذا يجب ان تكون القيود من النوع اكبر من او تســـاوي، وبهذا نحول القيود الهيكلية من النوع اقل من او تساوي والنوع تساوي الى النوع اكبر من او تساوي.

القيد الاول يصبح $-X_1 - X_2 \geq -8$

القيد الثاني نعوضه بمتباينتين فيصبح

$$5X_1 + 8X_2 \geq 20$$
$$-5X_1 - 8X_2 \geq -20$$

وتصبح المشكلة لتصغير $f(x) = 30X_1 + 20X_2$ بشرط ان:

$$-X_1 \quad - X_2 \geq -8$$
$$5X_1 + 8X_2 \geq 20$$
$$-5X_1 - 8X_2 \geq -20$$

وان

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

وتكون المشكلة البديلة هي لتعظيم $\phi(y) = -8y_1 + 20y_2 - 20y_3$ بشرط ان:

$$-y_1 + 5y_2 - 5y_3 \leq 30$$
$$-y_1 + 8y_2 - 8y_3 \leq 20$$

وان

$$y_i \geq 0$$
$$i = 1,2,3$$

نحل هذه المشكلة بطريقة السمبلكس الجدولية:

نحول القيود الى معادلات وذلك باضـــــافة المتغيرات المتممة غير الســـــالبة y_5،y_4 للقيدين على التوالي فتصبح:

$$-y_1 + 5y_2 - 5y_3 + y_4 = 30$$
$$-y_1 + 8y_2 - 8y_3 + y_5 = 20$$

متغيرات اساسية	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**الثوابت**
X_4	−1	5	−5	1	0	20
X_5	−1	8	−8	0	1	20
-φ(y)	−8	20	−20	0	0	0
X_4	−3/8	0	0	1	−5/8	35/2
X_2	−1/8	1	−1	0	−1/8	5/2
-φ(y)	−11/2	0	0	0	−5/2	−50

بما ان المطلوب هو تعظيم الدالة ومعاملات دالة الهدف في الصـــف الاخير جميعها غير موجبة يكون هذا هو الحل الامثل وفيه :

$$Y_2 = 5/2 \quad , \quad Y_1 = 0$$
$$\varphi(y) = 50 \quad , \quad X_3 = 0$$

من هذا الحل نجد قيم X_2،X_1 وهي مساوية لمعاملات المتغيرات المتممة في دالة الهدف بالسطر الاخير ، اي ان $f(x) = 50, X_2 = 5/2, X_1 = 0$ حيث دالة الهدف متساوية في المشكلتين.

الفصل العاشر

مشكلة النقل

Transportation Problem

مقدمة

تعتبر طريقة السـمبلكس طريقة عامة لحل مشـاكل البرمجة الخطية، ولكن توجد بعض من هذه المشـاكل التي يمكن حلها بطرق ابسـط من طريقة السـمبلكس، وذلك راجع لخصـائص هذه المشـاكل، ومن هذه المشاكل التي يمكن حلها بغير طريقة السمبلكس مشكلة النقل.

تتلخص مشـكلة النقل في وجود عدة مراكز للانتاج سـنرمز لها بالرموز $a_1,a_2,...,a_m$ والذين ينتجون الكميات $A_1,A_2,...,A_m$ ، وكذلك يوجد عدة نقط للاسـتهلاك سـنرمز لها بالرموز $b_1,b_2,...,b_n$ والتي تحتاج الى الكميات $B_1,B_2,...,B_n$، وسـوف نفترض ان مجموع الكميات المتاحة يسـاوي الكميات المطلوبة، والمطلوب استيفاء حاجة مراكز الاستهلاك من مراكز الانتاج، بحيث تكون تكلفة نقل الكميات من مراكز الانتاج الى مراكز الاستهلاك اقل مايمكن، وذلك لان تكلفة نقل الوحدة من اي مركز انتاج الى اي مركز استهلاك مختلفة عن بعضها البعض، والمطلوب هنا هو جعل تكلفة النقل اقل مايمكن ولا يؤخذ الوقت في الاعتبار، ولذلك تسمى في هذه الحالة مشكلة النقل حسب معيار التكلفة.

سوف نرمز للكمية المنقولة من مراكز الانتاج i الى مراكز الاستهلاك j بالرمز X_{ij}، وتعطى مشكلة النقل في صـورة جدول يشـمل تكلفة نقل الوحدة من السـلعة من مراكز الانتاج الى مراكز الاسـتهلاك، وعمود وصف اضافيين يبينان الكميات المتاحة في مراكز الانتاج والكميات المطلوبة لمراكز الاستهلاك كما في المثال التالي:

م.س / م.ا	**b_1**	**b_2**	**b_3**	**...**	**b_n**	**الكميات المتاحة**
a_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	...	C_{1n}	A_1
a_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	...	C_{2n}	A_2
. .	. .	. .	. . .	. ...	. . .	. . .
a_m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	...	C_{mn}	A_m
الكميات المطلوبة	B_1	B_2	B_3	...	B_n	

ويمكن صياغة مشكلة النقل رياضيا كالاتي:

تحديد قيم X_{ij} التي تجعل قيمة الدالة $f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$ اقل مايمكن بشرط ان:

$$\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=A_i \quad i=1,2,...,m$$

$$\sum_{i=1}^{m}X_{ij}=B_j \quad j=1,2,...,n$$

$$\sum A_i=\sum B_j$$

مجموع القيم X_{ij} تسمى خطة الشحن (النقل)، وتكون خطة الشحن اساسية اذا كان عدد المتغيرات التي تختلف عن الصفر بها لايتعدى $(m+n)-1$، وبقية الشحنات بها تساوي الصفر، وتكون خطة الشحن مثلى اذا كانت تكلفة النقل اقل ما يمكن.

سوف نسمى خلايا جدول النقل التي بها الشحنة تختلف عن الصفر بالخلايا الاساسية، والخلايا الاخرى التي فيها الشحنة = صفر بالخلايا غير الاساسية.

1.10 كيفية ايجاد حل لمشكلة النقل

How to find a solution to the transportation problem

1. نوجد حل اساسي للمشكلة
2. نحسن الحل (نعدل الحل) الاساسي حتى نصل الى الحل الامثل

كيفية ايجاد حل اساسي

يمكن الوصول الى حل اساسي بعدة طرق، ابسطها طريقة **الركن الشمالي الغربي**
North West-Corner Method

وسوف نوضح هذه الطريقة بمثال:

مثال 1 : اعتبر مشـــكلة النقل الممثلة بالجدول التالي حيث تكلفة شـــحن الوحدة من مركز الانتاج i الى مركز الاستهلاك j هي المعطاة في الجدول داخل الاقواس.

م.س / م.ا	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	**الكميات المتاحة**
a_1	10	8	5	6	9	**48**
a_2	6	7	8	6	5	**30**
a_3	8	7	10	8	7	**27**
a_4	7	5	4	6	8	**20**
الكميات المطلوبة	**18**	**27**	**42**	**12**	**26**	**125 / 125**

والمطلوب ايجاد حل اساسي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.

نبدأ بالتوزيع من الركن الشمالي الغربي اي اعلى ركن من الشمال، فنعطي مركز الاستهلاك b_1 من مركز الانتاج a_1 حتى يكتفي واذا كان المتاح في a_1 لايكفي اكملنا الكمية المطلوبة لـb_1 من a_2 ثم ننتقل الى b_2 فنعطيه مايحتاج من a_1 اذا كان مازال لديه فائض او ننتقل الى a_2 او الى a_3 اذا لم يكن لدى a_2 مايعطيه وهكذا، حتى ينتهي المطلوب وينتهي المعروض في مثالنا:

م.س / م.ا	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	الكميات المتاحة
a_1	10 / 18	8 / 27	5 / 3	6	9	**48**
a_2	6	7	8 / 30	6	5	**30**
a_3	8	7	10 / 9	8 / 12	7 / 6	**27**
a_4	7	5	4	6	8 / 20	**20**
الكميات المطلوبة	**18**	**27**	**42**	**12**	**26**	**125** / **125**

في هذا الحل تكون تكلفة النقل =

$$(18 \times 10) + (27 \times 8) + (3 \times 5) + (30 \times 8) + (9 \times 10) + (12 \times 8) +$$
$$(6 \times 7) + (20 \times 8) = 1039$$

ويلاحظ ان هذا الحل الاساسي يحتاج الى تحسين حتى نصل الى الحل الامثل لاننا لم ناخذ في الاعتبار تكاليف الشحن عند الحصول على هذا الحل.

الحصول على حل امثل:

الخطوة الثانية هي تحسين الحل الاساسي حتى نحصل على الحل الامثل، يمكن الحصول على حل امثل باتباع **الطريقة التوزيعية** او **طريقة لوريا Distributive Method or Luria Method**

سنناقش الان الطريقة التوزيعية ولذلك سوف نعرف الدورة:

الدورة:

يقصد بها مجموع الخلايا التي يضمها خط منكسر مقفل يعمل في كل خلية زاوية قائمة والمفروض ان يكون العدد زوجي.

سوف نحدد الدورة المعدلة بانها الدورة بعد وضع اشارة + واشارة – في خلاياها.

ثمن الدورة:

عبارة عن المجموع الجبري لتكلفة النقل للوحدة الواحدة في جميع الخلايا التي تضمها الدورة.

ولتحسين الخطة سوف نبدل من وضع الشحنات بواسطة الدورات ذات الاثمان السالبة، وسوف نستخدم تلك الدورات التي تقع قممها السالبة في خلايا اساسية.

واذا لم يكن هناك دورات ذات اثمان سالبة في الجدول فان هذا يدل على انه لايمكن تخفيض تكلفة النقل اكثر من ذلك، ونكون بذلك قد وصلنا الى الحل الامثل.

وتتلخص الطريقة التوزيعية في البحث عن الدورات سالبة الاثمان، ثم نبدل وضع الشحنات في خلايا هذه الدورات (مع بقاء باقي الشحنات على حالها) حتى لا يبقى في الجدول دورات سالبة الاثمان، وعند تحسين الخطة بواسطة التبديل الدوري، فانه كما في طريقة السمبلكس نستبدل متغير غير اساسي بمتغير اساسي، نملأ خلية غير اساسية في مقابل ذلك نفرغ خلية اساسية، ولذلك يبقى عدد الخلايا الاساسية دائما مساويا $(m+n) -1$، ومن الممكن اثبات ان لكل خلية غير اساسية من خلايا جدول النقل توجد دورة وحيدة احد قممها تقع في هذه االخلية غير الاساسية، وتوضع فيها اشارة + واذا كان ثمن هذه الدورة سالبا فانه يمكن تحسين الخطة بواسطة التبديل الدوري. وعدد الوحدات التي سوف تتبدل سوف تتحدد من العدد

الاقل شـــحنات التي تقع في القمم الســـالبة للدورة، فنضـــيف هذا العدد الاقل شـــحنات التي تقع في القمم الســـالبة للدورة، فنضـــيف هذا العدد الى الخلايا االموجبة ونطرح من الخلايا الســـالبة للتوضـــيح نعود الى المثال السابق ونحسنه حتى نصل الحل الامثل.

نبحث عن الدورات ذات الاثمان السالبة فتكون هي:

− 8 27	+ 5 3
+ 7 0	− 8 30

ثمن الدورة

7 + 5 – 8 – 8 = **- 4**

خلية غير اساسية

بطرح وجمع الخلية الســالبة الصــغرى من والى كل خلية حســب الاشــارة الموجودة فيها تصــبح هذه الدورة كما يلي مع بقاء باقي الخلايا كما هي:

8 0	5 30
7 27	8 3

هناك دورة اخرى سالبة الثمن وهي:

− 8 12	+ 7 6
+ 6 0	− 8 20

ثمن الدورة **3** - = 8 – 8 – 7 + 6

تصبح

8 0	7 18
6 12	8 8

ويصبح الحل كما يلي:

م.س / م.ا	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	الكميات المتاحة
a_1	10 18	8 0	5 30	6	9	**48**
a_2	6	7 27	8 3	6	5	**30**
a_3	8	7	10 9	8	7 18	**27**
a_4	7	5	4	6 12	8 8	**20**
الكميات المطلوبة	**18**	**27**	**42**	**12**	**26**	

تكلفة الشحن 895

هذا الحل ليس حلاً امثلاً لانه مازال هناك دورات سالبة الاثمان وهي:

− 7 27	+ 8 3
+ 7 0	− 10 9

ثمن الدورة **2 -** = 10 – 7 – 8 + 7

فتصبح:

7 18	8 12
7 9	10 0

ويصبح الحل:

م.س / م.ا	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	الكميات المتاحة
a_1	10 18	8 0	5 30	6	9	**48**
a_2	6	7 18	8 12	6	5	**30**
a_3	8	7 9	10	8	7 18	**27**
a_4	7	5	4	6 12	8 8	**20**
الكميات المطلوبة	**18**	**27**	**42**	**12**	**26**	

هذا الحل ليس حلاً امثلاً لانه مازال هناك دورات سالبة الاثمان وهي:

− 10 18	+ 5 30
+ 6 0	− 8 12

ثمن الدورة $6+5-10-8 = \mathbf{-7}$

فتصبح:

10 6	5 42
6 12	8 0

− 7 9	+ 7 18
+ 5 0	− 8 8

7+5−7−7= − **2** ثمن الدورة

فتصبح:

7 1	7 26
5 8	8 0

ويصبح الحل:

م.س / م.ا	**b_1**	**b_2**	**b_3**	**b_4**	**b_5**	**الكميات المتاحة**
a_1	10 6	8	5 42	6	9	**48**
a_2	6 12	7 18	7	6	5	**30**
a_3	8	7 1	10	8	7 26	**27**
a_4	7	5 8	4	6 12	8	**20**
الكميات المطلوبة	**18**	**27**	**42**	**12**	**26**	

تكلفة الشحن = 757

وهذا ايضا ليس بالحل الامثل لانه مازال هناك دورة سالبة الثمن وهي:

− 7 18				+ 5 0
+ 7 1				− 7 26

7+5−7−7= **2−** ثمن الدورة

فتصبح:

7 0				5 18
7 19				7 8

ويصبح الحل:

م.س م.ا	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	**الكميات المتاحة**
a_1	10 6	8	5 42	6	9	**48**
a_2	6 12	7	8	6	5 18	**30**
a_3	8	7 19	10	8	7 8	**27**
a_4	7	5 8	4	6 12	8	**20**
الكميات المطلوبة	**18**	**27**	**42**	**12**	**26**	

لم يبق دورات سالبة الاثمان وبهذا يكون هذا هو الحل الامثل والذي تكون عنده تكلفة الشحن

$$=6\times10+12\times6+19\times7+8\times5+42\times5+12\times6+18\times5+8\times7= 733$$

مثال 2: اوجد الحل الامثل لمشكلة النقل التالية:

م.س م.ا	b_1	b_2	b_3	b_4	**الكميات المتاحة**
a_1	10	7	6	8	**31**
a_2	5	6	5	4	**48**
a_3	8	7	6	7	**38**
الكميات المطلوبة	**22**	**34**	**41**	**20**	**117**

اولا: نجد الحل الاساسي حسب طريقة الركن الشمالي الغربي فنحصل على:

م.س / م.ا	b_1	b_2	b_3	b_4	الكميات المتاحة
a_1	10 22	7 9	6	8	**31**
a_2	5	6 25	5 23	4	**48**
a_3	8	7	6 18	7 20	**38**
الكميات المطلوبة	**22**	**34**	**41**	**20**	**117**

ثانياً:

نحسن الحل فنبحث عن الدورات ذات الاثمان السالبة ونجري عليها التبديل وهي:

− 10 22	+ 7 9
+ 5 0	− 8 25

ثمن الدورة

5+7−10−6= −4

فتصبح

10 0	7 31
5 22	6 3

− 5 23	+ 4 0
+ 6 18	− 7 20

ثمن الدورة

6+4−5−7= −2

فتصبح:

5 3	4 20
6 38	7 0

يصبح الحل هو:

م.س / م.ا	b_1	b_2	b_3	b_4	الكميات المتاحة
a_1	10	7 31	6	8	**31**
a_2	5 22	6 3	5 3	4 20	**48**
a_3	8	7	6 38	7	**38**
الكميات المطلوبة	**22**	**34**	**41**	**20**	

هذا حل امثل، لانه لايوجد فيه دورات ذات اثمان سالبة وتكلفة النقل هي :

$$=22\times5+31\times7+3\times6+3\times5+38\times6+20\times4=668$$

2.10 الحالة المتداعية DEGENERATE CASE

قد يحدث احيانا ان يكون عدد المتغيرات(الخلايا) الاســاســية اقل من 1-(m+n)، وتســمى هذه الحالة بالحالة المتداعية، ومن المستحسن دائما ان يكون عدد الخلايا الاساسية مساويا الى 1-(m+n)، وللتغلب على الحالة المتداعية فاننا نغير من امكانيات مراكز الانتاج غير مخلين بشـرط التوازن العام حتى نصـل الى الحالة التي يكون فيها عدد الخلايا الاساسية مساويا 1-(m+n).

مثال 3: المطلوب ايجاد حل لمشكلة النقل الممثلة بالجدول التالي:

	b_1	b_2	b_3	الكميات المتاحة
a_1	10 / 20	5 / 20	4 / E	40+E
a_2	6	4	5 / 23	23
a_3	7	3	6 / 20-E	20-E
الكميات المطلوبة	20	20	43	83

بعد الحصول على الحل الاساسي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي كما هو مبين في الجدول اعلاه نجد ان عدد الخلايا الاساسية 4 والمفروض ان تكون $(m+n)-1=5$، للتغلب على هذه الحالة نضيف E الى امكانيات مركز الانتاج الاول ونطرحها من امكانيات مركز الانتاج الاخير (E قريبة جدا من الصفر) ويصبح الجدول كما هو اعلاه، ثم نحسن الحل حتى نصل الى الحل الامثل وعند ذلك نجعل $E = 0$.

3.10 حالات خاصة Special Cases

1. عندما يكون $\sum b_j > \sum a_i$

في هذه الحالة متغير مساعد (غير حقيقي) Dummy يضاف الى مصفوفة مشكلة النقل ليوازي او يقابل زيادة الطلب، وتكون تكلفة شحن الوحدة من المصدر المساعد الى كل مركز من مراكز الاستهلاك مساوية للصفر. واليك المثال التالي للتوضيح:

مراكز الانتاج	مراكز الاستهلاك			العرض
	b_1	b_2	b_3	
a_1	5	3	2	300
a_2	6	4	1	400
Dummy	0	0	0	50
الطلب	**300**	**200**	**250**	**750**

مراكز الانتاج	مراكز الاستهلاك			الكميات المتاحة (العرض)
	b_1	b_2	b_3	
a_1	5	3	2	300
a_2	6	4	1	400
الكميات المطلوبة	**300**	**200**	**250**	**700** / **750**

2. عندما يكون $\sum b_j < \sum a_i$

وهذه الحالة تتبع نفس الشئ، ولكن المتغير المساعد يضاف الى مراكز الاستهلاك ليقابل الزيادة في العرض وذلك كما في المثال التالي:

مراكز الانتاج	مراكز الاستهلاك				العرض
	b_1	b_2	b_3	**Dummy**	
a_1	5	3	2	0	300
a_2	6	4	1	0	400
الطلب	**200**	**200**	**250**	**50**	**700**

مراكز الانتاج	مراكز الاستهلاك			العرض
	b_1	b_2	b_3	
a_1	5	3	2	**300**
a_2	6	4	1	**400**
الطلب	**200**	**200**	**250**	**700** / **650**

4.10 مسائل على مشكلة النقل

1. اوجد الحل الامثل لمشكلة النقل التالية:

مراكز الانتاج	**مراكز الاستهلاك**					**العرض**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
1	3	2	3	4	1	**50**
2	4	1	2	4	2	**125**
3	1	0	5	3	2	**125**
الطلب	**100**	**60**	**40**	**75**	**25**	

الجواب:

$$\mathbf{100\times1 + 60\times1 + 40\times2 + 25\times4 + 25\times4 + 25\times3 + 25\times1 = 540}$$

4 دورات سالبة

2. في الجدول التالي 5 مراكز للانتاج و 3 مراكز للاســــتهلاك عرض مراكز الانتاج وطلب مراكز الاستهلاك وكذلك تكلفة شحن الوحدة الواحدة من كل مركز انتاج الى كل مركز استهلاك مبينة في الجدول:

مراكز الانتاج	**مراكز الاستهلاك**			**العرض**
	1	**2**	**3**	
1	10	20	30	25
2	15	40	35	115
3	20	15	40	60
4	20	30	55	30
5	40	30	25	70
الطلب	**50**	**100**	**150**	

اوجد الحل الامثل لهذه المشكلة

الجواب:

$$50\times15 + 10\times20 + 60\times15 + 30\times30 + 15\times30 + 65\times35 + 70\times25 = 7225$$

4 دورات سالبة

3. اوجد الحل الامثل لمشكلة النقل التالية:

مراكز الانتاج	مراكز الاستهلاك			العرض
	1	**2**	**3**	
1	3	2	4	100
2	0	4	2	300
3	2	1	3	400
الطلب	**150**	**400**	**250**	

الجواب:

$$150\times0 + 100\times2 + 300\times1 + 150\times2 + 100\times3 = 1100$$

دورتان سالبتان

4. تقع ثلاثة مناجم في اماكن مختلفة، وتقدم اســبوعيا 40،33،60 طن على الترتيب لخمســة مراكز استهلاك هي E,D,C,B,A وهذه المراكز تطلب 30،18،20،45،22 طن على الترتيب اسبوعياً، وتكلفة نقل الطن من المناجم الثلاثة الى كل من مراكز الاستهلاك هي كما يلي:

من المنجم الاول الى E,D,C,B,A هي 4،4،3،1،4 على الترتيب

من المنجم الثاني الى E,D,C,B,A هي 3،2،2،3،2 على الترتيب

من المنجم الثالث الى E,D,C,B,A هي 4،4،2،5،3 على الترتيب

اوجد الحل الامثل لمشكلة النقل هذه

الجواب:

$$\mathbf{15\times2 + 7\times3 + 45\times1 + 20\times2 + 18\times2 + 15\times4 + 13\times4 + 2\times0 = 284}$$

5 دورات سالبة

5. الجدول التالي يعطي جميع المعلومات الضرورية عن الكميات المتاحة في المخازن B,A والكميات المطلوبة للاسواق IV,III,II,I وتكلفة شحن الوحدة من كل مخزن لكل سوق، وقد وضع مسؤول الشحن (اعتمادا على خبرته في مجال الشحن) الحل التالي للمشكلة: 12 وحدة من A الى السوق II و وحدة واحدة من A الى III و 9 وحدات من A الى IV و 15 وحدة من B الى III و 7 وحدات من C الى I و وحدة واحدة من C الى III

المخزن \ السوق	I	II	III	IV	العرض
A	5	2	4	3	**22**
B	4	8	1	6	**15**
C	4	6	7	5	**8**
الطلب	**7**	**12**	**17**	**9**	

هل حل كاتب الشحن هو الحل الامثل ام لا؟ ولماذا؟

الجواب: تكلفة الشحن عند الكاتب =

$$12x2 + 1x4 + 9x3 + 15x1 + 7x4 + 1x7 = \mathbf{105}$$

لكن تكلفة الشحن المثلى =

$$12x2 + 2x4 + 8x3 + 15x1 + 7x4 + 1x5 = \mathbf{104}$$

دورة واحدة سالبة

∴ حل الكاتب ليس هو الحل الامثل.

6. حل مشكلة النقل التالية:

م.س / م.م	**1**	**2**	**3**	**4**	**العرض**
1	2	1	2	4	**20**
2	1	3	4	3	**9**
3	1	3	2	5	**14**
الطلب	**7**	**15**	**10**	**11**	

الجواب:

$$7\times1 + 15\times1 + 3\times2 + 7\times2 + 2\times4 + 9\times3 = 77$$

5 دورات سالبة

المراجع

1. ماجد عبدالله بخايا و فاروق وسام؛ "مقدمة في بحوث العمليات" المكتبة الوطنية، بغداد، 2000.
2. محمد اسعد عبد الوهاب البنداني؛ "مقدمة في بحوث العمليات"، الطبعة الثالثة، عمان / الاردن، 1998.
3. حامد سعد نور الشمرتي؛ "بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا"، الطبعة االولى، مكتية الذاكرة للنشر والتوزيع، بغداد، 2010.
4. حامد سعد نور الشمرتي و علي خليل الزبيد؛ " مدخل الى بحوث العمليات " الطبعة االاولى، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان – االاردن، 2000.
5. حامد سعد نور الشمرتي؛ "بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا"، مكتبة الذاكرة، بغداد، 2001.
6. محمود الفضل العبيدي و مؤيد عبد الحسين؛ "بحوث العمليات وتطبيقاتها في ادارة الاعمال"، عمان 2004.
7. حميد ناصر حميد الفتال و دلال صادق الجواد؛ "بحوث العمليات" دار البازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان / االردن، 2008.
8. صادق ماجد محمد؛ "بحوث العمليات" الطبعة األاولى، مطبعة دار الحكمة، بغداد، العراق 1991.
9. محمد عبد العال النعيمي وآخرون؛ "مقدمة في بحوث العمليات" دار الوائل للنشر، عمان / الاردن 1999
10. محمد اسعد عبد الوهاب النيداني؛ "مقدمة في بحوث العمليات"، الطبعة الثالثة، عمان/ الاردن، 1998.

11. عادل احمد هدو؛ "نظرية القرار الاحصائية"، كلية الادارة والاقتصاد، الجامعة المستنصرية، بغداد، 1992.

12. عبد الجبار خضر بخيت النعيمي وآخرون؛ "مقدمة في نماذج البرمجة الخطية بين النظرية والتطبيق" مطبعة اساور، بغداد، 2013.

13. ابو القاسم مسعود الشيخ؛ "بحوث العمليات"، الطبعة الثانية، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، 2009.

14. هلال هادي وآخرون؛ "بحوث العمليات وتطبيقاتها"، الجامعة التكنولوجية، بغداد، 1987

15. احمد حاتم عبدالله؛ "بحوث العمليات"، من منشورات الجامعة الافتراضية السورية، سورية، 2018.

16. Gupta, A., D. S. Hira; Operations Research, Chand & Company LID, New Delhi, 1987.

17. Hamdy, A., Taha; Operations Research an Introduction, 6th ed. Coller MacMillian, 1997.

18. Philip, D. T., Ravindran & Slberg; Operations Research: Principles and Practice, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1987.

19. Hillier.F.S; Introduction in Operations Research, New York, 1990, Me Hill. USA

20. Duellenbach.H.GGeorge and D.C.Mc Nickel; Introduction to Operations Research Techniques, 1983, Allyn and Bacon. INC. Cat. USA

21. Hillier Fredricks and Geral, Lieberman; Introduction to Operations Research, Holden-Day, Inc. Sanfransisco, 1983

ترجمة فاروق رسام و آخرون، الكلية الفنية العسكرية، بغداد، 1987