مباديء وأساسيات

الاحتمالات

Principles and Fundamentals of Probabilities

الاستاذ الدكتور

خالد زهدي مصطفى خواجه

المديـر العـام الاسبق

للمعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية

المملكة الاردنية الهاشمية
رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/8/3997)

519.2
خواجة، خالد زهدي مصطفى
مبادئ واساسيات الاحتمالات / خالد زهدي مصطفى خواجة.
- عمان:المؤلف, 2022

( ) ص.
ر.ا. : 2022/8/3997.
المواصفات :/نظرية الاحتمالات//العمليات العشوائية//التوزيعات الاحصائية//الاحصاء الرياضي/

المحتويات

المــلاحــق

المقدمـــــة

اتسعت استخدامات الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية، وأصبحت اداة رئيسية وهامة للاقتصادي والاجتماعي والمهندس والطبيب وغيرهم، ودخلت في كافة العلوم، وأصبحت تدرس في المدارس والجامعات.

ونظرا لأهمية هذا الموضوع ارتأيت أن أضع بين أيدي طلبتنا الأعزاء هذا المؤلف، الذي هو مقدمه في الاحتمالات، ولم أشأ أن أتعمق في الموضوع فيصبح للمتخصصين فقط، واردته ان يكون شرحا مبسطا مع أمثلة تطبيقية وتمارين وحلول لهذه التمارين تسهل على الطالب فهم المادة وترغبه بها ولا تنفره منها. ولهذا اقتصر هذا المؤلف على التعريف بالاحتمالات وقوانينها، والمتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية وأدلة توصيف هذه التوزيعات (التوقع والتباين والتغاير)، والتوزيعات المقطعة والمتصلة مع التركيز على التوزيع الطبيعي، إضافة إلى مجموعه من التمارين المتنوعة وحلولها.

ارجو أن أكون قد وفقت .

أ.د. خالد زهدي خواجه

الفصل الاول

مدخل رياضي

Mathematical Introduction

يعالج هذا الفصل بعض الافكار والمفاهيم الاساسية الرياضية، التي تعتبر ضرورية لأي مدخل معاصر في نظرية الاحتمالات، وسوف نتعرض في هذا الفصل وبايجاز الى نظرية المجموعات وطرق العد والتباديل والتوافيق والمجاميع.

1.1 المجموعات Set Notation

❖ مفهوم المجموعة

يعتبر مفهوم او مصطلح المجموعة واحدا من الافكار الرياضية الاساسية والضرورية لدراسة الاحتمالات والاحصاء.

مما لاشك فيه ان كل منا صادفه في حياته الكثير من الامثلة التي توضح مفهوم المجموعة دون ان تلفت نظره، فمثلا اي تجمع من الاشياء او الاشخاص يعتبر مجموعة مثل:

- فريق كرة القدم لنادي معين
- مجموعة الطالبات في الفصل
- صفحات الكتاب
- مجموعة الحروف الابجدية
- مجموعة الارقام في العدد 1234

تعريف

اي تجمع من الاشياء (العناصر) المعرفة تعريفا محددا تسمى مجموعة (Set)   **وتسمى هذه الاشياء بعناصر المجموعة (Elements)**

مثلا:

- فريق كرة القدم   مجموعة عناصرها اعضاء الفريق
- الحروف الابجدية   مجموعة عناصرها أ ، ب ، ج ، ......
- مجموعة الارقام 1234   مجموعة عناصرها الارقام 1 ، 2 ، 3 ، 4

❖ **الرموز المستعملة للتعبير عن المجموعة وعناصرها**

- تستعمل الحروف الكبيرة للتعبير عن المجموعة مثل: A, B, C, …, X, Y, Z
- تستعمل الحروف الصغيرة للتعبير عن عناصر المجموعة مثل: a, b, c, …, z
- تستعمل القوسين {   } لكتابة عناصلر المجموعة (دون مراعاة الترتيب عند كتابتها)
- تستعمل الفاصلة (،) بين كل عنصر والذي يليه حتى لا تختلط العناصر معا

امثلة متنوعة على الفئات (المجموعات):

1. المجموعة $X = \{1,2,7\}$ العناصر: 1 ، 2 ، 7
2. المجموعة $X = \{a, b, c\}$ العناصر: a ، b ، c
3. المجموعة X = {احمد و حسن وعلي}   العناصر: احمد ، حسن ، علي
4. المجموعة X = {الحروف الابجدية}   العناصر: الحروف الابجدية
5. المجموعة A = {عوامل العدد 15}   العناصر: 1، −1، 3، −3، 5، −5، 15، −15

❖ طرق التعبير عن المجموعات

الطريقة الاولى: كتابة جميع عناصر المجموعة بين قوسين {   }

الطريقة الثانية: وصف عناصر المجموعة طبقا لقاعدة معينة (او اكثر) كما هو موضح في الامثلة 4 و 5 اعلاه، وعلى سبيل التوضيح: في مثال 5 عوامل العدد 15 هي:

1، −1، 3، −3، 5، −5، 15، −15، في هذا المثال استطعنا ان نعبر عن المجموعة بالطريقتين.

التعبير عن المجموعة رياضيا بالطريقة الثانية:

مثلا X هي مجموعة المستقيمات التي تمر بنقطة الاصل، يمكن التعبير عن المجموعة X هكذا:

X = {a : حيث a مستقيم يمر بنقطة الاصل}

X = {a : a مستقيم يمر بنقطة الاصل}

X = {a / a مستقيم يمر بنقطة الاصل}

ويفضل استعمال الرمز الاول

مثال: لنعتبرالمجموعة X المعرفة هكذا:

$$X = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

من الواضح ان الخاصية $x^2 - 3x + 2 = 0$ تتحقق عندما $x = 1 , 2$

اي ان X {1 , 2}

في هذا المثال عبرنا عن المجموعة بالطريقتين.

المجموعة الخالية Empty Set

هي مجموعة خالية من العناصر، اي لا تحتوي على اي عنصر،   ويرمز لها بالرمز Ø او {   }

مثال على المجموعة الخالية:

$$X = \{x: x^2 + 3x + 8 = 0 \quad , \; x > 0\}$$

الخاصية هنا تتكون من قاعدتين او شرطين هما:

1. $x^2 + 3x + 8 = 0$
2. X موجبة

واضح انه لا يوجد عنصر x يحقق الشرطين معا، لانه حسب الشرط الثاني x موجبة، وبالتالي

$x^2 + 3x + 8$ لا يمكن ان تساوي صفر، بل يجب ان تكون موجبة، اي ان المجموعة المذكورة

خالية من العناصر

$$X = \emptyset = \{ \quad \}$$

رمز الانتماء $\in$ ورمز عدم الانتماء $\notin$

لنعتبر المجموع $X = \{1,2,8\}$

واضح ان هذه المجموعة تتكون من العناصر 1 , 2 , 8

العنصر 1 ينتمي الى الى المجموعة X ويعبر عن ذلك رياضيا هكذا $1 \in X$

العنصر 2 ينتمي الى الى المجموعة X ويعبر عن ذلك رياضيا هكذا $2 \in X$

العنصر 4 لا ينتمي الى الى المجموعة X ويعبر عن ذلك رياضيا هكذا $4 \notin X$

وعليه بالنسبة للمجموعة المذكورة:

$8 \in X$ بينما $4 \notin X \;,\; 5 \notin X \;,\; 6 \notin X \;,\; 7 \notin X$

اصطلاح عام

اذا كان العنصر a ينتمي الى المجموعة X نكتب $a \in X$

اذا كان العنصران a,b ينتميان الى المجموعة X نكتب $a, b \in X$

اذا كانت وبصفة عامة a,b,c عناصر تنتمي الى المجموعة X نكتب $a,b,c \in X$

وذلك على سبيل الاختصار

مثال

اذا كان X محيط المستطيل abcd (اي مجموعة النقط التي تقع على محيط المستطيل)، و o مركز هذا المستطيل فان $a \in X$, $b \in X$, $c \in X$, $d \in X$

لكن $o \notin X$

باختصار نكتب $a,b,c,d \in X$, $o \notin X$

هناك عناصر اخرى تنتمي الى المجموعة X وهي لا نهائية

❖ بعض مجموعات الاعداد الشائعة الاستعمات والرموز الخاصة بها

هناك كثير من المجموعات التي يكثر استعمالها مثل: مجموعة الاعداد الصحيحة والاعداد الكلية والاعداد الطبيعية والاعداد القياسية والحقيقية وغيرها، وسوف نعرف هذه المجموعات، ورغم ان هناك اختلافا بين الرموز المستعملة لمثل هذه المجموعات الا اننا سنحاول استعمال الرموز التي توضح الى حد كبير هذه المجموعات:

1) مجموعة الاعداد الطبيعية $N = \{1,2,3,4,5, \ldots\ldots\}$
2) مجموعة الاعداد الكلية $J = \{0,1,2,3,4,5, \ldots\ldots\}$
3) مجموعة الاعداد الصحيحة $I = \{-3,-2,-1,0,1,2,3, \ldots\ldots\}$
4) مجموعة الاعداد القياسية $Q = \{\frac{a}{b} : b \neq 0$ عددان صحيحان $a,b\}$
5) مجموعة الاعداد الحقيقية $R = \left\{x:\right.$ عدد حقيقي $\left. x\right\}$
6) مجموعة الاعداد المركبة $C = \{x + iy: \quad x, y \in R\}$

ملاحظات هامة

1) كل عنصر في N ينتمي ال J لكن العكس ليس صحيحا لان $O \in J\ ,\ O \notin N$

2) كل عنصر في J ينتمي الى I لكن العكس ليس صحيحا لان $-5 \in I\ , -5 \notin J$

3) كل عنصر في I ينتمي الى Q لكن العكس ليس صحيحا لان $\frac{1}{2} \in Q\ ,\ \frac{1}{2} \notin I$

4) كل عنصر في Q ينتمي الى R لكن العكس ليس صحيحا لان $\sqrt{3} \in R\ ,\ \sqrt{3} \notin Q$

5) كل عنصر في R ينتمي الى C لكن العكس ليس صحيحا لان $2+5i \in C\ ,\ 2+5i \notin R$

مثال

اذكر 6 عناصر تنتمي الى R ولكنها لا تنتمي الى Q

$$\sqrt{2}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{5}\ ,\ \sqrt[3]{14}\ ,\ \pi\ ,\ e \in R$$

$$\notin Q$$

❖ جبر المعلومات

تساوي المجموعات واحتوائها

تساوي المجموعات Equality of Two Sets

تعريف: **يقال للمجموعتين X , Y متساويتان اذا كان**

كل عنصر من عناصر X هو عنصر في Y

كل عنصر من عناصر Y هو عنصر في X

يعبر عن ذلك رياضيا هكذا:

$$X = Y\ ,\ Y = X$$

اما اذا كانت المجموعتان X , Y غير متساويتين فيعبر عن ذلك رياضيا هكذا:

$$X \neq Y$$

ملاحظة هامة

عند دراسة علاقة التساوي بين مجموعتين يجب ملاحظة:

1) ان ترتيب العناصر في اي منهما لا قيمة له

2) ان تكرار عنصر او اكثر في احدى المجموعتين (او في كليهما) لا قيمة له

امثلة

1) اذا كانت $X = \{1,3,5\}$ و $Y = \{3,1,5\}$ فان $X = Y$

2) اذا كانت $X = \{1,2,4,1,2\}$ و $Y = \{1,2,4,\}$ فان $X = Y$

سؤال هام

لدينا مجموعتان X , Y غير متساويتين، اي ان $X \neq Y$ هل هذا يعني انه لا توجد علاقة بين عناصر المجموعتين؟

هناك الاحتمالات الآتية:

1) كل عنصر في X هو عنصر في Y ، لكن ليس كل عنصر في Y هو عنصر في X

في هذه الحالة يقال ان X مجموعة جزئية (Subset) من المجموعة Y ويعبر عن ذلك هكذا

$X \subset Y$ و $Y \supset X$

2) كل عنصر في Y هو عنصر في X لكن ليس كل عنصر في X هو عنصر في Y

في هذه الحالة يقال ان Y مجموعة جزئية (Subset) من المجموعة X ويعبر عن ذلك هكذا

$Y \subset X$ و $X \supset Y$

3) بعض العناصر في احدى المجموعتين (وليس كل عنصر) تظهر في المجموعة الاخرى

4) لا يوجد اي عنصر مشترك بين المجموعتين

مثال 1

اذا كانت $X = \{1,3,6\}$ و $Y = \{1,2,4,8\}$ و $Z = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

فمن الواضح $X \subset Z$ و $Y \subset Z$

لكن مما هو جدير بالذكر انه لا يمكن مقارنة Y , X

مثال 2

قارن بين مجموعات الاعداد الطبيعية N ومجموعة الاعداد الكلية J ومجموعة الاعداد الصحيحة I ومجموعة الاعداد القياسية Q ومجموعة الاعداد الحقيقية R ومجموعة الاعداد المركبة C

من الواضح ان :

$N \subset J$

$J \subset I$

$I \subset Q$

$Q \subset R$

$R \subset C$

بعض النظريات الاساسية

نظرية 1 لأي مجموعة X : $\emptyset \subset X$

نظرية 2   لأي مجموعة X : $X \subset X$

نظرية 3   لأي فئتين X , Y اذا كان $X \subset Y$ ، $Y \subset X$ فان $X = Y$

نظرية 4   اذا كان $Y \subset Z$ ، $X \subset Y$ فان $X \subset Z$

❖ عمليات المجموعات Operation on Sets

الاتحاد Union

اذا ذهبنا الى احدى المدارس وكانت X مجموعة تلاميذ الصف الاول

Y مجموعة تلاميذ الصف الثاني

فان المجموعة التي تضم تلاميذ الصفين الاول والثاني تسمى باتحاد المجموعتين Union of two sets

X , Y ، ايضا اذا كانت Z مجموعة تلاميذ الصف الثالث، فان المجموعة التي تضم تلاميذ الصفوف

الثلاثة تسمى باتحاد المجموعات X , Y , Z

تعريف

اتحاد مجموعتين X , Y هو المجموعة التي تضم عناصر X , Y معا ويرمز له بالرمز

$$X \cup Y$$

ويعرف رياضيا هكذا:

$$X \cup Y = \{a : a \in X \ \ or \ \ a \in Y\}$$

امثلة

1) اذا كانت $X = \{1,3,5\}$ و $Y = \{2,4\}$ فان

$$X \cup Y = \{1,2,3,4,5\}$$

2) اذا كانت $X = \{a, b, c\}$ و $Y = \{b, d, e\}$ فان

$$X \cup Y = \{a, b, c, d, e\}$$

التقاطع Intersection

يعرف تقاطع المجموعتين X , Y بالمجموعة التي تضم العناصر المشتركة بينهما، اي العناصر التي تظهر في كل من المجموعة X والمجموعة Y معا ويرمز لهذه المجموعى بالرمز

$$X \cap Y$$

ويمكن تعريف التقاطع رياضيا هكذا:

$$X \cap Y = \{a : a \in X \ \ and \ \ a \in Y\}$$

مثال 1

اذا كانت $X = \{1,2,3,4,5\}$ و $Y = \{2,4,6,8\}$

فان $X \cap Y = \{2,4\}$

ايضا $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6,8\}$

مثال 2

اذا كانت $X = \{1,3,5\}$ **و** $Y = \{2,4,6,8\}$

فان $X \cap Y = \{\ \} = \emptyset$

مثال 3

اذا كانت $X = \{1,3,5\}$ و $Y = \{1,2,3,4,5\}$

فان $X \cap Y = \{1,3,5\}$

ايضا $X \cup Y = \{1,2,3,4,5\}$

نلاحظ ان $X \cap Y = X$ وذلك لان كل عنصر من X ينتمي الى Y

$X \cup Y = Y$ اي ان $X \subset Y$

اذا كان $X \subset Y$ فان $X \cup Y = Y$, $X \cap Y = X$

الفرق بين مجموعتين

تعريف

يعرف الفرق بين مجموعتين X , Y (ويرمز له بالرمز $X-Y$) بالمجموعة التي تتكون من عناصر X التي لا تنتمي الى المجموعة Y

$$X-Y = \{a : a \in X \quad , \quad a \notin Y\}$$

قاعدة

يمكن ايجاد $X-Y$ باستبعاد كل عنصر من المجموعة X يظهر في المجموعة Y

وبالمثل: $Y - X = \{a : a \in Y \quad , \quad a \notin X\}$

مثال

اذا كانت $Y = \{3,5,6\}$ و $X = \{1,2,3,4,6,7,8\}$

اوجد $X - Y$ و $Y - X$

لايجاد $X-Y$ نستبعد من X كل عنصر يظهر في Y اي علينا ان نستبعد العنصرين 3 و 6

$$X - Y = \{1,2,4,7,8\}$$

لايجاد $Y - X$ نستبعد من Y كل عنصر يظهر في X اي علينا ان نستبعد العنصرين 3 و 6 وبالتالي لن يبقى في Y سوى العنصر 5

$$Y - X = \{5\}$$

❖ الاعداد الحقيقية Real Numbers

عرفنا في الجزء السابق ان:

مجموعة الاعداد الطبيعية $N = \{1,2,3, \ldots\}$ هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الكلية

$$J = \{0,1,2,3, \ldots\}$$

مجموعة الاعداد الكلية هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الصحيحة

$$I = \{-3, -2, -1,0,1,2,3, \ldots\}$$

مجموعة الاعداد الصحيحة هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد القياسية

$$Q = \{\tfrac{a}{b} : b \neq 0 \quad \text{a,b عددان صحيحان}\}$$

مجموعة الاعداد القياسية هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية

$$R = \left\{x: \quad x \text{ عدد حقيقي}\right\}$$

بهذا نرى ان مجموعة الاعداد الحقيقية تضم جميع الاعداد الموجودة في المجموعات السابقة، وهي بالاضافة الى ذلك تضم اعدادا لا تنتمي الى هذه المجموعات، وهي الاعداد المعروفة بالاعداد غير القياسية (او الاعداد الصماء)، مثل: $\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[3]{5}\ ,\ \pi\ ,\ e$

وهكذا فان مجموعة الاعداد الحقيقية هي المجموعة التي تنتمي اليها مجموعة الاعداد القياسية وغير القياسية (الصماء)

وللمساعدة في مراجعة الاعداد الحقيقية وخواصها لا بد من تقديم اكثر المفاهيم اهمية بما في ذلك بعض القواعد والرموز :

1) قوانين التبديل **Commutative Laws**

I. $a + b = b + a$

II. $a*b = b*a$

لجميع الاعداد الحقيقية a و b

2) قوانين الضم والتوحيد **Associative Law**

I. $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

II. $a*b*c = (a*b)*c = a*(b*c)$

لجميع الاعداد الحقيقية a , b , c

3) قانون التوزيع **Distributive Law**

I. $a*(b+c) = (a*b) + (a*c)$

لجميع الاعداد الحقيقية a , b , c

4) حساب النسب Arithmetic of Ratios

I. $\frac{a}{b} = a*\frac{1}{b}$ $b \neq 0$

II. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a*d+b*c}{b*d}$ $b \neq 0$, $d \neq 0$

III. $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$ $b \neq 0$, $d \neq 0$

IV. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{a*d}{b*c}$ $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$

5) قواعد القسمة Rules of Division

I. $0 \div a = 0$

ما عدا الصفر a لاي عدد حقيقي

II. $a \div 0 = (\frac{a}{0})$

a عدد غير نهائي لاي عدد حقيقي

III. $a \div a = 1$

ما عدا الصفر a لاي عدد حقيقي

6) قواعد الاشارات Rules of Signs

I. a * (−b) = − (a * b)

II. (− a) * b = − (a * b)

III. (− a) * (− b) = a * b

IV. − (− a) = a

2.1 طرق العد Counting Methods

يعتمد حساب الاحتمال (كما سنرى لاحقا) على حساب عدد الحالات الممكنة والحالات المواتية الناتجة عن تجربة معينة، يمكننا حصر هذه الحالات بسهولة في الحالات البسيطة، ولكن عند زيادة عدد الحوادث فانه من الصعب حصرها، وعليه يجب الاستعانة ببعض الطرق الرياضية لحسابها، واهم هذه الطرق هي:

1) مبدأ العد او قاعدة العد
2) التباديل
3) التوافيق

1.2.1 مبدأ العد Counting Principle

اذا امكننا اجراء تجربة ما بعد n_1 و n_2 و n_3 طريقة مختلفة بالتتابع، يكون عدد الطرق التي يمكننا بها اجراء هذه العمليات بالترتيب المذكور هو حاصل الضرب $n_1 * n_2 * n_3$

مثال

اذا رقمت السيارات بحرفين مختلفين من اللغة الانجليزية يتبعها ثلاثة ارقام، فما هو عدد السيارات التي يمكن ترقيمها؟

الحل

يمكن كتابة الحرف الاول ب 26 طريقة (بحذف الصفر)، والحرف الثاني ب 25 طريقة مختلفة (بحيث لا يكون الحرفان متشابهان)

ويمكن اختيار الرقم الاول ب 9 طرق (بحذف الصفر)، والثاني ب 10 طرق والثالث ب 10، طرق

فيكون عدد السيارات التي يمكن ترقيمها هو:

$$26 * 25 * 9 * 10 * 10 = 585000$$

2.2.1 المضروب Factorial

يرمز في الرياضيات لحاصل ضرب الاعداد الصحيحة الموجبة من العدد 1 حتى العدد n (بما في ذلك العدد n) يرمز له بالرمز !n (ويقرأ مضروب n او n عاملي)

مضروب n (ويرمز له بالرمز !n) هو:

$$n! = 1*2*3*\ldots.\ (n-2)\ (n-1)\ n$$

$$= n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots.\ (3)\ (2)\ (1)$$

ومن الملائم ان نعرف ما يلي:

$0! = 1$

$1! = 1$

$n! = n\ (n-1)!$

$\frac{n!}{n} = (n-1)!$

مثال

$\mathbf{2}! = 2*1$

$\mathbf{3}! = 3*2*1$

$5! = 5*4*3*2*1$

$10! = 10*9*8*7*6!$

3.2.1 التباديل Permutation

يسمى وضع n من الاشياء في ترتيب معين بانه تبديل لهذه الاشياء، (بشرط ان تؤخذ جميع هذه الاشياء)، ويسمى وضع اي عدد r (حيث $r \leq n$) من هذه الاشياء في ترتيب معين بانه تبديل العدد n من الاشياء مأخوذة r في كل مرة. وهكذا يمكننا تعريف التباديل كما يأتي:

التباديل:

هي عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة اشياء باخذها كلها او بعضها، ويرمز له بالرمز ${}_nP_r$ او P(n,r) وقانونه:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , \quad {}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

مثال 1

بكم طريقة يمكن ان يجلس 6 اشخاص في صف فيه 6 مقاعد؟

الحل

عدد الطرق هو $_6P_6$

$$= \frac{6!}{(6-6)!}$$

$$= \frac{6!}{1} = 6!$$

$$= 6*5*4*3*2*1 = 720$$

مثال 2

اذا كان لدينا 4 اشخاص A و B و C و D ونريد ان نختار منهم اثنين، فبكم طريقة يمكننا الاختيار؟

الحل: عدد الطرق هو: $_4P_2$

$$_4P_2 = \ _4P_2 \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4*3*2!}{2!}$$

$$= 4*3 = 12$$

وهذه الطرق هي:

AB AC AD BA BC BD

CA CB CD DA DB DC

التباديل مع التكرار

يراد احيانا معرفة عدد تباديل مجموعة من العناصر يكون بعضها متماثلا

نفرض اننا نريد معرفة عدد الطرق المختلفة لترتيب حروف كلمة يافا، نعلم انه يوجد

$24 = 4!$ تبديلا للحروف الاربعة، ولكن الحرف الثاني والرابع (حرف الالف) متماثلة، وهكذا فالترتيب:

أ$_2$ أ$_4$ ي ف = أ$_4$ أ$_2$ ي ف

أ$_2$ أ$_4$ ف ي = أ$_4$ أ$_2$ ف ي

ي ف أ$_2$ أ$_4$ = ي ف أ$_4$ أ$_2$

ي أ$_2$ أ$_4$ ف = ي أ$_4$ أ$_2$ ف

ف أ$_2$ أ$_4$ ي = ف أ$_4$ أ$_2$ ي

ف أ$_2$ ي أ$_4$ = ف أ$_4$ ي أ$_2$ وهكذا

نلاحظ بان كثير من الترتيبات تكون متماثلة اذا حذفنا رقم حرف الألف، لان الألف لا تختلف،

وهكذا فان عدد طرق ترتيب حروف كلمة يافا لا يساوي $4! = 24$ وانما يساوي:

$$\frac{4!}{2!1!1!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

وهكذا يمكننا القول بانه اذا كان لدينا n من الاشياء، m منها متشابهة فان عدد طرق الترتيب الممكنة لهذه الاشياء على خط هو:

$$\frac{n!}{m!}$$

واذا كان m_1 متشابهة و m_2 متشابهة فان عدد الطرق الممكنة لترتيب n على خط هو:

$$\frac{n!}{m_1!\,m_2!}$$

نظرية

عدد تباديل n عنصر من بينها n_1 عنصرا متماثلا و n_2 عنصرا متماثلا و ... و n_r عنصرا متماثلا هو:

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2! \dots n_r!}$$

مثال 3

ما هو عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من احرف كلمة statistics ؟

عدد الاحرف الكلية 10

الحرف s تكرر 3 مرات

الحرف t تكرر 3 مرات

الحرف a تكرر مرة واحدة

الحرف i تكرر مرتان

الحرف c تكرر مرة واحدة

لذا فان عدد الترتيبات هو:

$$\frac{10!}{3!\ 3!\,1!\,2!\,1!} = 50400$$

4.2.1 التوافيق Combination

يقصد بالتوافيق بانها عدد طرق الاختيار غير المرتب التي يمكن تكوينها من عدة اشياء، باخذها كلها او بعضها ويرمز له باحد الرموز الآتية:

$${}_nC_r \quad \text{او} \quad \binom{n}{r} \quad \text{او} \quad C_r^n$$

وقانونه هو:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

اي ان الترتيب في حالة التوافيق غير مهم، ومن الملائم ان نعرف ان:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

$$C_0^n = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$$

مثال: ما هو عدد اللجان التي يمكن تكوينها من 8 اشخاص، بحيث ان كل لجنة تحتوي على 3 اشخاص؟

الحل: الترتيب هنا غير مهم، فاختيار الخامس قبل السادس او السادس قبل الخامس نتيجته واحدة

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8*7*6*5!}{3*2*5!} = 8*7 = 56$$

5.2.1 نظرية ذات الحدين Binomial Theorem

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1*2}\, a^{n-2}b^2 + \ldots.\ nab^{n-1} + b^n$$
$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

مثال

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + a^3b^2 + \frac{5*4}{2*1}\, a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

ويجب ملاحظة الخواص التالية لمفكوك $(a+b)^n$

I. يوجد في المفكوك n+1 حدا

II. مجموع اسي a و b في كل حد هو n

III. يتناقص أس a حدا بعد حد من n الى 0 ويتزايد أس b حدا بعد حد من 0 الى n

IV. معامل كل حد هو $\binom{n}{k}$ حيث k هو أس اي من a او b

$\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ اذا كان $a + b = n$

V. تتساوى معاملات الحدود التي تبعد عن بداية المفكوك ونهاية المفكوك بنفس المقدار

6.2.1 المجاميع The Summation Notation

اذا كان لدينا n متغير هي: x_1 , x_2 , x_3 , ... x_n فان

مجموع هذه المتغيرات يعبر عنه بالرمز

$$\sum_{i=0}^{n} x_i$$

وتقرأ مجموع x_i او سيغما x_i حيث i من 1 الى n

وهكذا

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

امثلة

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$\sum_{i=1}^{6} f_i x_i = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_{4+} f_5 x_{5+} f_6 x_6$$

$$\sum_{i=1}^{3} (x_i - 3)^2 = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2$$

$$\left(\sum_{i=2}^{4} x_i\right)^2 = (x_2 + x_3 + x_4)^2$$

خواص المجموعات Properties

من اهم الخواص التي تسهل عمليات الجمع ما يأتي:

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

3.1 تمارين الفصل الاول / المدخل الرياضي

المجموعات

1) اكتب المجموعة للارقام من 4 الى 8 باسلوبين

2) اكتب المجموعة **B** للارقام التي تتكون منها سنة ميلادية

3) فيما يأتي: عوض عن النجمة * ب $\in$ او $\notin$ حسب الصحيح

i. $3 * \{2,3,5\}$

ii. $0 * \{1,3\}$

iii. $\frac{1}{2} * \{x/x = \text{كسر}\}$

iv. $4 * \{2,6,8\}$

4) بين اي المجموعات التالية مجموعة جزئية من $B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

a) $A = \{0,1,5\}$

b) $A = \emptyset$

c) $A = \{2,4,6,8\}$

d) $A = \{6\}$

الارقام الحقيقية

5) اوجد نتائج العمليات التالية:

a) $5 * \{-3\} + 2$

b) $- 5 * \{6 - 2\}$

c) $\frac{2}{3} + \frac{6}{7}$

d) $\frac{3-2}{4-2}$

e) $\frac{7}{8} + \frac{3}{4}$

f) $- \frac{4}{3} * \frac{6}{8}$

g) $7 + 3 - \frac{1}{3} * \frac{30}{10}$

h) $\left\{\frac{2}{3} - 5\right\} * \frac{9}{8}$

مبدأ العد

6) كم عددا مكونا من ثلاثة ارقام يمكن تكوينه من مجموعة الارقام :

$$A = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}\}$$

i. عندما يسمح بتكرار الرقم في نفس العدد

ii. عندما لا يسمح بتكرار الرقم في نفس العدد

المضاريب

7) احسب:

i. $\frac{9!}{6!}$

ii. $\frac{7!}{5!}$

8) اختصر

i. $\frac{n!}{\{n-1\}!}$

ii. $\frac{\{n+2\}!}{n!}$

التباديل

9) بكم طريقة يمكن لمجموعة من 5 اشخاص ان يرتبوا انفسهم بحيث يجلسون:

i. في صف به 5 مقاعد

ii. حول مائدة مستديرة

(10

i. بكم طريقة يمكن ان يجلس ثلاثة اولاد وبنتان في صف؟

ii. بكم طريقة يمكن ان يجلسوا في صف اذا جلس الاولاد معا والبنات معا؟

11) كم عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من جميع حروف كلمة من الكلمات التالية:

i. فلسطين

ii. القسطنطينية

iii. الدمام

التوافيق

12) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من رجلين وامرأة من بين خمسة رجال وامرأتين

13) في امتحان من عشرة اسئلة على الطالب ان يجيب على ثمانية اسئلة فقط

i. بكم طريقة يمكن للطالب ان يختار الاسئلة؟

ii. بكم طريقة يمكنه الاختيار اذا كانت الاسئلة الثلاثة الاولى اجبارية؟

iii. بكم طريقة يمكنه الاختيار اذا كان من الضروري ان يجيب على اربعة اسئلة من الاسئلة الخمسة الاولى؟

14) بكم طريقة يمكننا اختيار واحد او اكثر من خمسة

نظرية ذات الحدين

15) اوجد مفكوك $\{\mathbf{1+1}\}^{\mathbf{4}}$

16) اوجد مفكوك $\{\boldsymbol{2x+y^2}\}^{\mathbf{5}}$

المجاميع

17) اوجد مفكوك المجاميع الآتية:

i. $\sum_{i=1}^{4} x_i^2$

ii. $\sum_{i=1}^{4} \{x_i - 3\}^2$

iii. $\left(\sum_{i=2}^{4} x_i\right)^2$

18) اذا كانت $x_1 = 2$ و $x_2 = 4$ و $x_3 = 6$ و $x_4 = 8$

اوجد:

i. $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2$

ii. $\sum_{i=1}^{4} x_i$

iii. $\sum_{i=1}^{3} \{x_i - 5\}^2$

4.1 حل تمارين الفصل الاول / المدخل الرياضي

1) A = $\{\mathbf{8, 7, 6, 5, 4}\}$

او A = {x/x عدد صحيح بين الاربعة والثمانية بما فيها الثمانية}

2) A = {x/x الارقام التي تكون سنة الميلاد}

3)

i. $\in$

ii. $\notin$

iii. $\in$

iv. $\notin$

4) (a) و (c)

5)

a) 5*(-3) + 2 = -15 + 2 = -13
b) (-5) (6 - 2) = (-5) (4) = -20
c) $\frac{2}{3} + \frac{6}{7} = \frac{(2)(7) + (3)(6)}{(3)(7)} = \frac{32}{21}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{7}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8} + \frac{6}{8} = \frac{13}{18}$

f) $-(\frac{4}{3})(\frac{6}{8}) = -\frac{24}{24} = -1$

g) $7 + 3 - \frac{1}{3}(\frac{30}{10}) = 7 + 3 - 1 = 9$

h) $(\frac{2}{3} - 5)(\frac{9}{8}) = -(\frac{13}{9})(\frac{9}{8}) = -(\frac{13}{3})(\frac{9}{8}) = -\frac{39}{8}$

(6

i. $7 * 7 * 7 = 343$

ii. $7 * 6 * 5 = 210$

(7

i. $\frac{9!}{6!} = \frac{9*8*7*6!}{6!} = 9*8*7 = 504$

ii. $\frac{7!}{5!} = \frac{7*6*5!}{5!} = 7*6 = 42$

(8

i. $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)(n-2)....3*2*1}{(n-1)(n-2)....3*2*1} = \mathrm{n}$

$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = \mathrm{n}$

ii. $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)(n)!}{n^2+3n+2} = (\mathrm{n}+2)\,(\mathrm{n}+1)$

(9

i. يمكن للاشخاص الخمسة ان يجلسوا في صف واحد بطرق عددها !5

$= 5*4*3*2*1 = 120$

ii. يمكن لشخص واحد ان يجلس في اي مكان من المائدة المستديرة، ويمكن للأشخاص الاربعة الآخرين ان يرتبوا انفسهم حول المائدة بطرق عددها !4

$$= 4*3*2*1 = 24$$

يعطي هذا مثالا للتباديل الدائرية، وبصفة عامة يمكن ترتيب n شيء في دائرة بطرق عددها:

$$(n-1)\ (n-2)\ ......\ 3*2*1 = (n-1)!$$

(10

i. يمكن لخمسة اشخاص ان يجلسوا في صف واحد بطرق عددها $5! = 120$

ii. توجد طريقتان لتوزيع الاولاد معا والبنتين معا وهما: GGBBB و BBBGG

حيث ترمز **B** للولد و **G** للبنت

يمكن للبنتين ان تجلسا معا بطرق عددها $2!$

يمكن للأولاد ان يجلسوا معا بطرق عددها $3!$

∴ عدد الطرق المطلوبة هو $2!\,3! = 24$

(11

I. $6! = 720$ لانه يوجد 6 حروف ولا توجد تكرارات

II. $\frac{11!}{2!2!2!} = 4989600$ لانه يوجد 11 حرفا، اثنان منها هما ط واثنان هما ن واثنان هما ي

III. $\frac{6!}{2!2!}$ لانه يوجد 6 حروف، اثنان منها هما أ واثنان هما م

12) يمكن اختيار الرجلين من بين الخمسة رجال بطرق عددها $\binom{5}{2}$ ويمكن اختيار المرأة من بين امرأتين بطرق عددها $\binom{2}{1}$ ، وبذلك يكون اختيار اللجنة بطرق عددها:

$$\binom{5}{2}\binom{2}{1} = \left(\frac{5!}{2!3!}\right)\left(\frac{2!}{1!}\right) = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

(13

I. يمكن اختيار الاسئلة الثمانية بطرق عددها:

$$\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10*9}{2} = 45$$

II. اذا اجاب على الأسئلة الثلاثة الاولى فيمكنه اختيار الأسئلة الخمسة الاخرى من بين الاسئلة السبعة الباقية بطرق عددها:

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7*6}{2*1} = 21$$

III. اذا اجاب على الأسئلة الخمسة الاولى فيمكنه اختيار الأسئلة الثلاثة الاخرى من بين الاسئلة الخمسة الاخيرة بطرق عددها: $\binom{5}{3} = 10$

اذا اختار اربعة اسئلة من الخمسة الاولى واربعة اسئلة من الخمسة الاخيرة فانه سيختار بطرق عددها:

$$\binom{5}{4}\binom{5}{4} = 5*5 = 25$$

وهكذا فمجموع طرق الاختيار الممكنة هو:

$$10 + 25 = 35$$

14) يتم اختيار اما 1 او 2 او 3 او 4 او 5 وبذلك يكون عدد الطرق هو:

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \mathbf{5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31}$$

(15

$$\{1+1\}^4 = \binom{4}{0} 1^4 + \binom{4}{1} 1^3 1^1 + \binom{4}{2} 1^2 1^2 + \binom{4}{3} 1^1 1^3 + \binom{4}{4} 1^4$$

$$= \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

$$= 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

(16

$$\{2x + y^2\}^5 = \binom{5}{0} \{2x\}^5 + \binom{5}{1} \{2x\}^4 y^2 + \binom{5}{2} \{2x\}^3 \{y^2\}^2$$

$$+ \binom{5}{3} \{2x\}^2 \{y^2\}^3 + \binom{5}{4} \{2x\} \{y^2\}^4 + \binom{5}{5} \{y^2\}^5$$

$$= 32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10x \ y^8 + y^{10}$$

(17

i. $\sum_{i=0}^{4} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

ii. $\sum_{i=0}^{n} \{x_i - 3\}^2 = \{x_1 - 3\}^2 + \{x_2 - 3\}^2 + \{x_3 - 3\}^2$

iii. $\{\sum_{i=2}^{4} x_i\}^2 = \{x_2 + x_3 + x_4\}^2$

(18

i. $\{\sum_{i=1}^{4} x_i\}^2 = \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4\}^2$

$= \{2 + 4 + 6 + 8\}^2$

$= \{20\}^2$

$= 400$

ii. $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

$= 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2$

$= 120$

iii. $\sum_{i=1}^{3} \{x_i - 5\}^2 = \{x_1 - 5\}^2 + \{x_2 - 5\}^2 + \{x_3 - 5\}^2$

$$= \{2 - 5\}^2 + \{4 - 5\}^2 + \{6 - 5\}^2$$

$$= 9 + 1 + 1$$

الفصل الثاني

الاحتمـــالات

PROBABILITIES

1.2 معنى الاحتمال

لقد تم تعريف الاحتمال بطرق عديدة غير أن أبسطها " **هو مقياس لامكانية وقوع حدث (Event) معين**"

كثيراً ما نستعمل في حياتنا اليومية كلمات يحتمل ويمكن ويجوز، فنقول مثلاً من الممكن أو من المحتمل أن تمطر السماء اليوم، ونعني بهذا أن الظواهر الطبيعية المحيطة بنا اليوم مشابهة لنفس الظواهر الطبيعية في أوقات سابقة التي حدث فيها أن أمطرت السماء. كذلك عندما نقول أن احتمال سحب ورقة "سباتي" من مجموعة واحدة من ورق اللعب عددها (52) ورقة هو 1/4، فإن ما نعنيه في الحقيقة هو أننا إذا ما سحبنا ورقة واحدة من مجموعة ورق اللعب عدة مرات فأننا نتوقع أن نحصل على ورقة سباتي في 1/4 مرات السحب، وذلك لأن عدد أوراق "السباتي" في المجموعة هو 13.

إذن فالاحتمال هو $13/52 = 1/4$.

لقد شهد القرنين السادس عشر والسابع عشر اهتماما بارزاً بهذا النوع من الدراسات والبحوث، حيث كانت الظروف مواتية لذلك في تلك الفترة، إذ أن ألعاب المقامرة بورق اللعب ورمي حجر النرد كانت منتشرة في قصور المترفين في أوروبا، خاصة في فرنسا، وكانت هذه فترة النهضة العلمية في أوروبا وخاصة في مجال الرياضيات، وقد شعر المقامرون بحاجتهم إلى أسس علمية تساعدهم على حساب فرصهم في الكسب أو الخسارة، فلجأوا إلى علماء الرياضيات أمثال بسكال (PASCAL) وفرمات (FERMAT) وبرنولي (BERNOULLI) وغيرهم، وهنا كانت نقطة البدء في الدراسات الجدية في علم الاحتمال.

2.2 تعاريـف

كي نتمكن من عرض أسس ونظريات علم الاحتمال يلزمنا أولاً تقديم بعض التعاريف التي تستخدم في هذا المجال:

1- الحادث والتجربة والفراغ العيني:

افترض أننا نقوم بإجراء تجربة ما كرمي زهرة النرد مثلاً، ونلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الأوجه الســتة 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6، ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم فردي أي 1 أو 3 أو 5 من التجربة، وهكذا فإن عملية رمي الزهرة تسمى **تجربة (Experiment)** وظهور رقم فردي هو محل اهتمامنا يســمى **حادثاً (Event)**، ومجموعة جميع الحالات الممكنة الظهور تسمى **بالفراغ العيني (Sample Space)**.

ويلاحظ أن الحادث قد يكون حالة او اكثر من الفراغ العيني .

2- الحالات الممكنة (Possible Cases)

هي الحالات أو النتائج المختلفة التي يمكن أن تظهر نتيجة لإجراء تجربة معينة، فمثلاً عند رمي قطعة عملة تكون نتيجتها صورة أو كتابة، وعند رمي زهرة نرد تكون نتيجتها 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6، فيقال أن عدد الحالات الممكنة 2 في حالة رمي قطعة العملة و 6 في حالة رمي زهرة النرد.

3- الحالات المواتية (Favorable Cases)

هي النتائج او الحالات التي تؤدي إلى تحقيق الحادث الذي هو موضع اهتمامنا، فإذا كان الحادث هو الحصول على رقم فردي في حالة رمي زهرة النرد، فإن الحالات التي تحقق هذا الحادث هي الحصول على 1 أو 3 أو 5، هذه الحالات الثلاثة تسمى الحالات المواتية.

4- الحالات المتماثلة (Equally Likely Cases)

إذا كان لدينا عدة كرات معدنية مصنوعة من مادة واحدة متجانسة في الكثافة ولها نفس الوزن والحجم، وضعناها في كيس وسحبنا كرة منها بعد خلطها جيداً، فإن هذه الكرات تكون حالات متماثلة أي يكون لكل منها نفس النصيب في السحب.

5- الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events)

يقال عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا، فمثلاً عند رمي حجر النرد لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

6- الحوادث المستقلة (Independent Events)

يعتبر الحادثين A أو B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الآخر، فمثلاً عند رمي قطعة عملة واحدة مرتين متتاليتين فإن نتيجة الرمية الثانية لا تتأثر بنتيجة الأولى.

7- الحوادث الشاملة (Exhaustive Events)

تسمى الحوادث A ، B ، C ... حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لابد من حدوث إحداها عند إجراء التجربة.

فمثلاً عند اختيار طالب من الجامعة لمعرفة حالته ما إذا كان مدخنا أو غير مدخن، تعتبر هذه الحالات حوادث شاملة، لأنه لابد للفرد أن يكون له صفة واحدة من هذه الصفات. كذلك فإن الحصول على العدد 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 عند رمي حجر النرد تعتبر حوادث شاملة، لأنه لابد من حدوث إحداها.

3.2 حسـاب الاحتـمـال

الاحتمال "**هو نسبة عددية غير سالبة محصورة بين الصفر والواحد**"، حيث تدل القيمة صفر على حالة استحالة الحدوث، والقيمة واحد على الحادث الأكيد الوقوع، ويمكن حسابه أو تقديره بطريقتين :

- الاحتمال النظري
- الاحتمال التجريبي

❖ الاحتمال النظري (Theoretical Approach)

يعرف أيضاً بالاحتمال الكلاسيكي، والاحتمال النظري لحدوث حادثة ما هو نسبة عدد الحالات المواتية إلى عدد الحالات الممكنة الحدوث، على فرض أن كل الحالات لها نصيب متكافيء في الحدوث.

مثال 1 :

إذا كان لدينا كيس بداخله 8 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء، فما هو احتمال أن نسحب كرة ما لا على التعيين فتكون كرة بيضاء؟

الحل :

عدد الحالات الممكنة = 11

عدد الحالات المواتية = 3

$\therefore$ احتمال سحب كرة بيضاء = $3/11$

إذن من أجل حساب احتمال حدوث حادثة ما لابد من معرفة عدد الحالات الممكنة التي لها نصيب متكافيء في الحدوث وعدد الحالات المواتية .

مثال 2:

إذا كان هناك (4) أعضاء من مجلس إدارة إحدى الشركات هم:

(A ، B ، C ، D) مرشحين لاختيار اثنين منهم لتمثيل الشركة في احد المؤتمرات الدولية :

أ. ما هو احتمال اختيار العضو A

ب. ما هو احتمال اختيار أحد العضوين A أو D

ج. ما هو احتمال اختيار العضوين A و D

د. ما هو احتمال عدم اختيار العضو A

الحـل: الفراغ العيني S هو مجموعة الحالات الممكنة أي

S = {AB, AC, AD, BC, BD, CD}

أ- عدد الحالات المواتية لاختيار العضو A هو 3 حالات ، عدد الحالات الممكنة 6 حالات

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ب- هناك 5 حالات مواتية لاختيار A أو D

$$P(A \text{ or } D) = P(A \cup D) = \frac{5}{6}$$

ج- هناك حالة واحدة مواتية لاختيار A , D

$$P(A , D) = P(A \cap D) = \frac{1}{6}$$

د- هناك 3 حالات مواتية لعدم اختيار A

$$\therefore \ \mathrm{P}\,(\overline{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

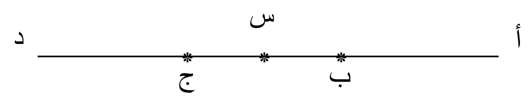
حيث $\mathrm{P}\,(\overline{A})$ هي احتمال عدم اختيار A

❖ عيوب الاحتمال النظري

هناك بعض العيوب أو الصعوبات في تطبيق التعريف النظري للاحتمال منها:

1- صعوبة حصر عدد الحالات الممكنة

فمثلاً لو كان لدينا المستقيم أ د، أخذت عليه النقطة س وطلب إلينا حساب احتمال وقوع النقطة س في الجزء ب جـ من المستقيم .



لحساب احتمال وقوع النقطة س في الجزء ب ج علينا أن نحسب مجموع نقاط الجزء ب جـ وهي التي تمثل عدد الحالات المواتية، وأن نحسب مجموع نقاط المستقيم أ د والتي تمثل عدد الحالات الممكنة، ولكننا نرى أنه من الصعب جداً حساب عدد هذه النقاط، وبالتالي من الصعب تطبيق التعريف النظري للاحتمال.

2- عدم تحقيق تماثل الحالات الممكنة

فالتعريف النظري يشترط لتطبيقه تماثل الحالات الممكنة، ولكن هذا لا يتحقق دائما، فمثلاً عند اختيار شخص ما لمعرفة حالته الاجتماعية (الزواجيه) وهي أعزب أو متزوج أو مطلق أو أرمل،

فلا يمكننا القول أن احتمال كونه أرملاً مثلاُ يساوي $\frac{1}{4}$، بل ولا يمكن حساب أو تقدير هذا الاحتمال باستخدام التعريف النظري، لأنه من الواضح أن هذه الحالات الممكنة غير متماثلة.

كذلك لا نستطيع القول بأن احتمال أن يكون المولود ذكراً يساوي $\frac{1}{2}$ على اعتبار أن الحالات المواتية حالة واحدة وهي كونه ذكراً والحالات الممكنة حالتان (ذكر أو أنثى)، وذلك لأنه من المشاهد في جميع أنحاء العالم هو زيادة عدد المواليد الذكور على الإناث.

من هنا نشأت الحاجة إلى تعريف آخر للاحتمال يتغلب على مثل هذه الصعوبات، هذا التعريف هو الاحتمال التجريبي:

❖ الاحتمال التجريبي (Empirical Approach)

إذا رمينا علبة كبريت على شكل متوازي مستطيلات N مرة، وكان عدد الرميات التي نتيجتها ظهور الوجه الكبير إلى أعلى n_1 وعدد الرميات التي نتيجتها ظهور الوجه المتوسط n_2 وعدد الرميات التي نتيجتها ظهور الوجه الصغير n_3 فإن:

نسبة عدد المرات للوجه الكبير $= \frac{n_1}{N}$

نسبة عدد المرات للوجه المتوسط $= \frac{n_2}{N}$

نسبة عدد المرات للوجه الصغير $= \frac{n_3}{N}$

هذه النسب تختلف عن الـ $\frac{1}{3}$ لعدم تماثل الحالات الممكنة

وكلما كانت N كبيرة كلما اقتربت هذه النسب من الاستقرار عند قيمة ثابتة، وقد تكون مثلاً 70% و 20%

و 10% على التوالي، بحيث يمكن القول أن:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n_1}{N} = 0.70$$

وهو احتمال الحصول على الوجه الأكبر عند رمي علبة الكبريت

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n_2}{N} = 0.20$$

وهو احتمال الحصول على الوجه الأوسط عند رمي علبة الكبريت

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n_3}{N} = 0.10$$

وهو احتمال الحصول على الوجه الأصغر عند رمي علبة الكبريت

كذلك إذا رمينا قطعة عملة n مرة وكان عدد مرات ظهور الوجه صورة هو r مرة، فإن نسبة عدد الصور $= \frac{r}{n}$. هذه النسبة قد تختلف عن $\frac{1}{2}$ إذا كانت n صغيرة، ولكن من الثابت أنه كلما زادت n كلما اقتربت النسبة $\frac{r}{n}$ من $\frac{1}{2}$، بحيث أنه عندما تكون n كبيرة جداً تصبح النسبة قريبة جداً من $\frac{1}{2}$

أي ان

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n_1}{N} = \frac{1}{2}$$

وهو احتمال الحصول على صورة عند رمي قطعة النقد.

وعلى ذلك يكون تعريف الاحتمال التجريبي كما يلي: **إذا أجريت تجربة مرات متتالية عددها N وكان عدد المرات التي يتحقق في كل منها حادث معين هو r مرة فان احتمال وقوع هذا الحادث يساوي** $\lim_{N \to \infty} \frac{r}{n}$

4.2 قوانين الاحتمالات

❖ *جمع الاحتمالات*

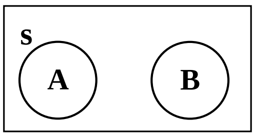
أ- في حالة كون الحوادث متنافية

إذا كانت الحوادث A_1 , A_2 , A_3 .... حوادث متنافية، بمعنى أن حدوث أحدها يؤدي إلى استحالة حدوث أي من الحوادث الأخرى، وبالتالي فإن احتمال حدوث هذه الحوادث معاً يكون معدوماً فإن

احتمال وقوع أي حادث من الحوادث المتنافية يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث

فإذا كان A ، B حادثين متنافيين كما في الشكل (1)

الشكل (1)



حوادث متنافية

فإن P (A أو B) = P(A) + P(B)

يرمز أيضاً لاحتمال وقوع أحد الحادثين بالرمز

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال 3 : في حالة رمي زهرة نرد ما هو احتمال الحصول على عدد فردي؟

الحل : الحصول على عدد فردي معناه الحصول على 1 أو 3 أو 5 وحيث أن هذه الحوادث الثلاثة متنافية فإن

P (1 أو 3 أو 5) = P (1) + P (3) + P (5)

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال 4:

عند رمي زهرة نرد مرتين ما هو احتمال الحصول على وجهين متشابهين؟

الحـل:

الحصول على وجهين متشابهين معناه الحصول على (1 و 1) أو (2 و 2) أو (3 و 3) ... أو (6 و 6) وهي حوادث متنافية واحتمال كل منها $\frac{1}{36}$

P (وجهين متشابهين) = P (1 و 1) + P (2 و 2) + ... + P (6 و 6)

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \ldots + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{6}{36}$$

ومما سبق نجد أن

إذا كان A , B حادثين شاملين ومتنافين فإن

$$\mathbf{P(A) + P(B) = 1}$$

إذا كان A , B حادثين شاملين ومتنافين ومتماثلين فإن

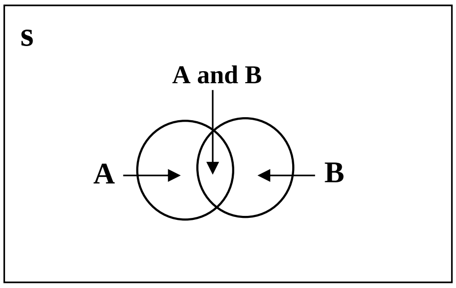
$$\mathbf{P(A) = P(B) = \frac{1}{2}}$$

إذا رمزنا للحادث عدم وقوع A بالرمز $\overline{A}$ فإن الحادثين A و $\overline{A}$ يكونان متنافيين وشاملين ، مثل أن يكون الشخص مدخنا أو غير مدخن

ب- في حالة كون الحوادث غير متنافية

عند عدم اشتراط تنافي الحادثين A و B يكون المقصود بالحادث (A أو B) وقوع A على انفراد أو وقوع B على انفراد أو وقوع الحادثين A و B معا في وقت واحد، كما يتضح من الشكل (2) التالي

شكل (2)



حوادث غير متنافية

الآن P (A) + P (B) تمثل مجموع الحالات المواتية للحادث A مضـــافاً إليها مجموع الحالات المواتية للحادث B، ولكن يجب ملاحظة أن كل من الحالات المواتية للحادث A وتلك المواتية للحادث B تتضمن الحالات المواتية لوقوع A و B معاً، وبهذا فإنه في حالة جمع P (A) و P (B) فإننا نجمع P (A و B) مرتين، لهذا لابد من طرح P (A و B) مرة واحدة لنحصـــل على الاحتمال P (A أو B) وهذا هو :

$$P(A \text{ او } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B)$$

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 5:

بالرجوع إلى مثال أعضاء مجلس إدارة إحدى الشركات، ما هو احتمال أن يتم اختيار العضو A أو العضو D من بين 4 أعضاء من مجلس إدارة إحدى الشركات (هم A و B و C و D) لتمثيلها في أحد المؤتمرات؟

الحـل:

الفراغ العيني وهو مجموع الحالات الممكنة S

$$S=\{AB,\ AC, AD, BC, BD, CD\}$$

- الحالات المواتية لاختيار A هي (AB, AC, AD)
- الحالات المواتية لاختيار D هي (AD, BD, CD)
- الحالات المواتية لاختيار A و D معاً هي (AD)

حسب قاعدة جمع الاحتمالات نحصل على النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً:

P (AUD) = P (A أو D) = P (A) + P (D) – P (A∩ D) = $\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}$

مثال 6:

إذا سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب فما هو احتمال أن تكون الورقة عدداً أو من مجموعة معينة من المجموعات الأربعة المكونة لأوراق اللعب؟

الحـل:

نفرض أن A يمثل الحصول على عدد، وأن B يمثل الحصول على ورقة من مجموعة معينة ولتكن "الديناري"

$$P(A) = \frac{40}{52}$$

$$P(B) = \frac{13}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{52}$$

ومن قانون جمع الاحتمالات

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{40}{52} + \frac{13}{52} - \frac{10}{52}$$

$$= \frac{43}{52}$$

❖ ضـرب الاحتـمالات

أن احتمال حدوث حادثين مستقلين أو أكثر معاً يساوي حاصل ضرب احتمال حدوث كل واحد من هذه الحوادث ببعضها بعضاً

إذا كان لدينا الحادثين المستقلين A و B فإن

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

مثال 7 :

ما هو احتمال الحصول على الوجه (3 ، 3) عند رمي زوج من أحجار النرد؟

الحـل:

أن احتمال الحصول على الوجه 3 لدى رمي الحجر الأول من النرد هو $\frac{1}{6}$

وكذلك احتمال الحصول على الوجه 3 لدى رمي الحجر الثاني من النرد هو $\frac{1}{6}$

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) =$$

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

❖ الاحتـمال الشرطي Conditional Probability

يهتم مدراء الشركات حين اتخاذ العديد من القرارات الإدارية أو التجارية بمعرفة احتمال حدوث حدث معين A إذا كان حدثاً آخر B قد حدث، فمثلاً حين يكون مطلوباً من المدير أن يتخذ قرارا بنشر إعلان دعائي لسلعة ما في التلفزيون فإنه يكون مهتما بمعرفة ما هو احتمال أن شخصاً ما سيشتري السلعة (الحادث A) إذا كان قد حصل أن شاهد الإعلان في التلفزيون (الحادث B).

وهكذا فإن احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B يدعى بالاحتمال الشرطي ويكتب على صورة P (A/B) وتقرأ احتمال الحادث A بعد وقوع الحادث B.

سنوضح مفهوم الاحتمال الشرطي بمساعدة المثال التالي:

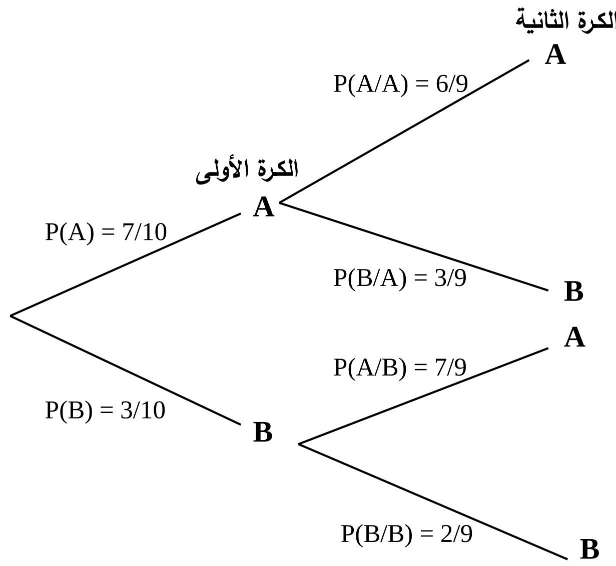
مثال 8 :

كيس يحتوي على 3 كرات سوداء و 7 كرات بيضاء

لنفرض أننا سحبنا منه كرتين كل على حده وبدون إعادة، فإذا رمزنا إلى سحب كرة بيضاء بالرمز A وإلى سحب كرة سوداء بالرمز B فإن الحالات المركبة التي نحصل عليها تتمثل بما يلي:

- الكرتان بيضاوان AA
- الأولى بيضاء والثانية سوداء AB
- الأولى سوداء والثانية بيضاء BA
- الكرتان سوداوان BB

احتمالات النتائج لسحب الكرة الأولى ثم الثانية بالترتيب يمكن إيضاحها بالرسم التالي:



وهكذا فإن الاحتمال المركب يمكن حسابه كما يلي:

احتمال ان تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية بيضاء = احتمال أن تكون الأولى بيضاء مضروبا في احتمال أن تكون الثانية بيضاء بشرط أن تكون الأولى بيضاء.

$$P(A \cap A) = P(A, A) = P(A)\ P(A/A)$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$$

وبالمثل

$$P (A \cap B) = P (A) \ P (B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{21}{90}$$

$$P (B \cap A) = P (B) \ P (A/B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{21}{90}$$

$$P (B \cap B) = P (B) \ P (B/B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

والآن نعمم هذا المثال ونقدم التعريف التالي للاحتمال الشرطي:

الاحتـمال الشرطي

إذا كان لدينا الحادثين B , A وكان P (B) لا يساوي الصفر فأن الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط وقوع الحادث B يعطي بالمعادلة التالية:

$$\mathbf{P (A/B) = P} \ \frac{(A \cap B)}{P(B)}$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط وقوع الحادث B يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ B , A على احتمال الحادث B

من الاحتمال الشرطي أعلاه يمكننا أن نستنتج الاحتمال المركب P(A B)

$$P (A \cap B) = P (A) \ P (B/A)$$

$$= P (B) \ P (A/B)$$

ويمكننا أن نعمم هذه الصيغة لأكثر من حادثين ففي حالة 3 حوادث تكون

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B/A)\, P(C/AB)$$

مثال 9 :

كيس يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء سحبت منه 3 كرات بدون إعادة ما هو احتمال أن تكون كلها بيضاء؟

الحل :

ليكن $A1$ هو الحصول على كرة بيضاء في السحب الأولى

$A2$ هو الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني

$A3$ هو الحصول على كرة بيضاء في السحب الثالث

وبالتطبيق المباشر للقانون

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1A_2)$$

$$= \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$= \frac{210}{720}$$

مثال 10 :

سحبت ورقتان من مجموعة أوراق اللعب بدون إعادة ما هو احتمال أن تكون عشرتين؟

الحل :

ليكن A هو الحصول على العدد 10 في الورقة الأولى

B هو الحصول على العدد 10 في الورقة الثانية

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A)$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$$

❖ العمليات العشوائية المنتهية والأشجار البيانية

يقصد بالعملية العشوائية المنتهية: التجارب المتتابعة بحيث يكون لكل تجربه عدد منته من النواتج باحتمالات معطاة

ومن الطرق المناسبة لوصف مثل هذه العلميات ولحساب احتمالات أي حدث ، طريقة الأشجار البيانية الموضحة في المثال التالي:

مثـال 11 :

لدينا ثلاثة أدراج كما يلي:

بالدرج I يوجد 6 أشرطة فيديو من بينها 2 أجنبيان .

بالدرج II يوجد 8 أشرطة فيديو من بينها 3 أجنبية.

بالدرج III يوجد 4 أشرطة فيديو من بينها 1 أجنبي.

اختير درجا بطريقة عشوائية وسحب منه شريطاً بطريقة عشوائية أيضاً. فما هو الاحتمال (P) أن يكون الشريط عربياً.

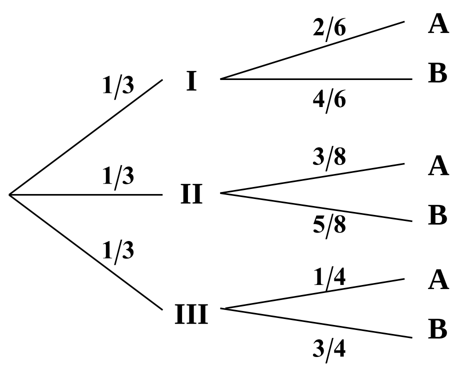
الحـل:

في هذا المثال العملية العشوائية متتابعة من تجربتين

(i)　نختار درجا من الثلاثة أدراج

(ii)　نختار شريطا ويحتمل أن يكون أجنبياً (A) أو عربياً (B)

تمثل الشجرة البيانية التالية هذه العملية وتعطي الاحتمال لكل فرع أو مسار للشجرة:



يكون احتمال حدوث أي مسار من المسارات الستة مساوياً لحاصل ضرب الاحتمالات لكل فرع في هذا المسار. فمثلاً اختيار الدرج II ثم اختيار شريطاً أجنبياً هو $\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$.

وحيث أنه توجد ثلاثة مسارات متنافية تؤدي إلى شريط عربي، يكون مجموع احتمالات هذه المسارات الثلاثة هو الاحتمال المطلوب (أي احتمال الحصول على شريط عربي):

$$P = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{6}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{49}{24}\right) = \frac{49}{72}$$

❖ نظريــة بيـز (Bayes' Theorem)

لو افترضنا أن لدينا صندوقين بداخلها مفردات سليمة ومعيبة، مفرده معيبه سحبت عشوائياً من أحد الصندوقين دون تعيين، ونحب أن نعرف ما هو احتمال أن تكون هذه المفردة المعيبة قد سحبت من الصندوق الأول؟

للإجابة على أسئلة من هذا النوع نستخدم قاعدة أو نظرية بيز، والتي يمكن اعتبارها تطبيقاً للاحتمال الشرطي.

تهدف نظرية بيز إلى حساب احتمالات صحة الفروض بناء على معلومات ميدانية أو تجريبية، في الغالب يكون لدى رجل الأعمال معلومات إضافية عن حادث معين أو مسالة معينة، إما من خلال خبرته الشخصية أو من خلال ماضي هذا الحادث أو المسألة. الاحتمالات التي تعتمد على الخبرة الشخصية وقبل الحصول على نتائج التجربة تدعى بالاحتمال القبلي Prior Probability، فمثلاً الاحتمالات المعتمدة على سجلات المبيعات السابقة أو على الرقم السابق لكمية الإنتاج غير السليم تعتبر أمثلة للاحتمال القبلي، أما عندما يحسب الاحتمال على ضوء معلومات ميدانية مكتسبة يسمى بالاحتمال البعدي Posterior Probability

فمثلاً عند دراسة حجم الأسرة الشائع قد يكون في ذهننا عدة فروض خاصة بهذا الحجم، هذه الفروض هي:

A1 أن يكون حجم الأسرة الشائع 1

A2 أن يكون حجم الأسرة الشائع 2

A3 أن يكون حجم الأسرة الشائع 3

.

.

A10 أن يكون حجم الأسرة الشائع 10

وهذه الحالات تمثل مجموعة شاملة ومتنافية.

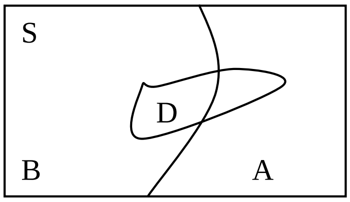
إذا جمعت بيانات ميدانية B عن هذه الظاهرة واستطعنا أن نحسب P(A4/B) فإن هذا الاحتمال يسمى بعديا، مع أن قاعدة بيز يمكن استخدامها لأكثر من حادثين شاملين ومتنافيين إلا أننا ومن أجل التبسيط سنتعرض لتطبيق النظرية على حادثين شاملين متنافيين فقط.

نظرية بيز

إذا كان A و B حادثين شاملين ومتنافيين في الفراغ العيني S و D أي حادث في نفس الفراغ بحيث $P(D) \neq O$ فان

$$\mathbf{P\ (A/D)} = \frac{P(A\ D)}{P(A\ D) + P(B\ D)}$$

$$\mathbf{P\ (B/D)} = \frac{P(B\ D)}{P(A\ D) + P(B\ D)}$$



مثال 12 :

إذا كان 0.40 من المدخنين في مدينة ما يفضلون نوع السجاير A والباقين منهم يفضلون النوع B وإذا كن النساء يمثلن 0.30 من بين الذين يفضلون A و 0.40 من بين الذين يفضلون B. فإذا اخترنا بطريقة عشوائية أحد المدخنين وكانت امرأة فما هو احتمال أن تكون ممن يفضلون النوع A؟

الحـل :

لنفرض أن الاحتمالات هي:

P (A) احتمال أن المدخن يفضل النوع A

P (B) احتمال أن المدخن يفضل النوع B

P (M/A) احتمال أن يكون المدخن رجلاً بشرط أن النوع A هو المفضل

P (M/B) احتمال أن يكون المدخن رجلاً بشرط أن النوع B هو المفضل

P (F/A) احتمال أن يكون المدخن امرأه بشرط أن النوع A هو المفضل

P (F/B) احتمال أن يكون المدخن امرأه بشرط أن النوع B هو المفضل

احتمالات الحالات الممكنة يوضحها الشكل التالي:

P(A) = 4/10 → **A**

- P(M/A) = 7/10 → **M** $P(AM) = P(A)\,P(M/A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{100}$
- P(F/A) = 3/10 → **F** $P(AF) = P(A)\,P(F/A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100}$

P(B) = 6/10 → **B**

- P(M/B) = 6/10 → **M** P(BM) = P (B) P(M/B) = 6/10 . 6/10 = 36/100
- P(F/B) = 4/10 → **F** $P(BF) = P(B)\,P(F/B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$

وباستخدام قاعدة بيز

$$P(A/F) = \frac{P(AF)}{P(AF) + P(BF)} = \frac{12/100}{12/100 + 24/100}$$

$$= \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

ويمكننا أن نمثل كل هذه الاحتمالات بالجدول التالي:

الحـادث	**الاحتمال القبلي**	**الاحتمال الشرطي**	**الاحتمال المركب**	**الاحتمال البعدي**
A	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{36}$
B	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{24}{36}$
المجمـوع	1.0		$\frac{36}{100}$	1.0

5.2 التجارب المتكررة Repeated Trials

سندرس في هذا القسم كيفية حساب احتمالات الحصول على النتائج المختلفة التي يمكن أن تترتب على تكرار تجربة معينة عدداً معيناً من المرات تحت نفس الظروف أو تحت ظروف مختلفة.

أولاً: التجارب المتكررة المستقلة ذات الاحتمال الثابت

مثلاً عند إلقاء قطعة نقد N مرة وكنا معنيين بظهور الوجه صورة، فأننا نلاحظ بأن هناك نتائج مختلفة لعدد مرات ظهور الوجه صورة، فقد نحصل على (N صورة وصفر كتابة) أو ($N-1$ صورة ومرة واحدة كتابة) أو ($N-2$ صورة ومرتين كتابة) أو ... أو (صفر صورة و N كتابة)، أي أن هناك $N+1$ حالة ممكنة . فمثلاً لو ألقينا قطعة النقد خمس مرات فإن الحالات الممكنة هي:

5 صورة	و	صفر كتابة
4 صور	و	كتابة واحدة
3 صور	و	كتابتان
2 صور	و	3 كتابة
1 صورةو	و	4 كتابة
صفر صورة	و	5 كتابة

أي أن مجموع الحالات الممكنة ست حالات

ولحساب مثل هذه الاحتمالات في التجارب المتكررة المستقلة ذات الاحتمال الثابت نستخدم القانون الاحتمالي ثنائي الحدين.

❖ القانون الاحتمالي ثنائي الحدين Binomil Probabilit Law

ولتوضيح كيفية التوصل إلى هذا القانون نجري الآتي:

احتمال ظهور الصورة على قطعة واحدة = ½

احتمال ظهور الصورة على 3 قطع معاً أو برمية قطعة واحدة ثلاث مرات هو

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

فإذا رمينا خمس قطع نقود أو قطعة واحدة خمس مرات يكون احتمال ظهور الصورة على ثلاث قطع منها يعني في الوقت نفسه عدم ظهورها على القطعتين الباقيتين أي = $(½)^2$. وبذلك يكون احتمال ظهور الصورة على ثلاث قطع وعدم ظهورها على القطعتين الباقيتين معاً في نفس الوقت =

$$(½)^3 \quad (½)^2$$

لكن هذه هي نتيجة ظهور الصورة في الثلاث رميات الأولى وعدم ظهورها في المرتين الباقيتين، ولكننا نريد حساب احتمال ظهور الصورة في أي ثلاث قطع وعدم ظهورها في أي قطعتين بغض النظر عن ترتيب القطع، ومن الواضح أن الاحتمال المطلوب أكبر من الاحتمال السابق، أي أن احتمال ظهور الصورة على أي ثلاث قطع أكبر من احتمال ظهورها على ثلاث قطع محددة، وللحصول على الاحتمال المطلوب نستخدم التوافيق، ونحسب عدد المجموعات التي يمكن تكوينها من خمس قطع بحيث تتكون كل مجموعة من ثلاث قطع فقط، أي نحسب عدد التوافيق التي يمكن تكوينها من خمس قطع بحيث تتكون كل توفيقة من ثلاث قطع أي $\subset_3^5$، والاحتمال الذي حسبناه أعلاه يكون صحيحاً لكل توفيقه أو مجموعة من هذه التوافيق الثلاث، أي الاحتمال ثابت ويتكرر في كل مجموعة ولذلك نضرب عدد التوافيق في الاحتمال المحسوب فنحصل على

$$\subset_3^5 \quad (½)^3 \quad (½)^2$$

$$= 10\ (½)^5$$

$$= \frac{10}{32}$$

والآن نستطيع أن نعمم فنقول أنه في حالة تجربة معينة نتيجتها وقوع حادث ما أو عدم وقوعه وكان احتمال وقوع هذا الحادث (P) واحتمال عدم وقوعه (1−P) وكررنا هذه التجربة (n) مرة، فإن احتمال وقوع هذا الحادث في (r) مرة حيث (0 < r <n) يكون =

$$\subset_r^n \; p^r \; (1-p)^{n-r}$$

وهذا ما يعرف باسم القانون الاحتمالي ثنائي الحدين، وكما ذكرنا فهو يستخدم في الحالات المستقلة ذات الاحتمال الثابت، فاحتمال وقوع الصورة أو عدم وقوعها ثابت في كل رمية = $\frac{1}{2}$

مثال (13):

بالعودة إلى مثالنا السابق وهو رمي قطعة نقد خمس مرات او رمي خمس قطع مرة واحدة فإن الاحتمالات الخاصة بظهور الوجه يمكن حسابها باستخدام هذا القانون كما يلي:

احتمال ظهور الصورة 5 مرات =

$$\subset_5^5 \quad (1/2)^5\,(1/2)^0 = (1/2)^5 = \frac{1}{32}$$

احتمال ظهور الصورة 4 مرات =

$$\subset_4^5 \quad (1/2)^4\,(1/2)^1 = 5\,(1/2)^5 = \frac{5}{32}$$

احتمال ظهور الصورة 3 مرات =

$$\subset_3^5 \quad (1/2)^3\,(1/2)^2 = 10\,(1/2)^5 = \frac{10}{32}$$

احتمال ظهور الصورة مرتين =

$$\subset_2^5 \quad (1/2)^2\,(1/2)^3 = 10\,(1/2)^5 = \frac{10}{32}$$

احتمال ظهور الصورة مرة واحدة =

$$C_1^5 \quad \left({}^1/_2\right)^1 \left({}^1/_2\right)^4 = \ 5 \ \left({}^1/_2\right)^5 = \frac{5}{32}$$

احتمال عدم ظهور الصورة =

$$C_0^5 \quad \left({}^1/_2\right)^0 \left({}^1/_2\right)^5 = \ 1 \ \left({}^1/_2\right)^5 = \frac{1}{32}$$

نلاحظ أن هذه النتائج هي الحدود المتتالية في مفكوك المقدار ثنائي الحدين

$$\left({}^1/_2 + {}^1/_2\right)^5$$

نتيجة لما كان عدد مرات وقوع الحادث في التجارب المتكررة التي عددها n قد تأخذ القيم صفر أو 1 أو 2 أو ... أو n وهي حالات شاملة ومتنافية فإن

$$P(O) + P(1) + P(2) + \ldots + P(n) = 1$$

مثال 14 :

أحصر الحالات الممكنة لظهور الوجبة 3 وأحسب احتمالاتها عند رمي حجر النرد 3 مرات.

الحل: الحالات الممكنة

- عدم ظهور الوجه 3 بتاتا
- ظهوره مرة واحدة
- ظهوره مرتين
- ظهوره ثلاث مرات
- احتمال عدم ظهور الوجه 3 بتاتاً =

$$\subset_0^3\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$$

– احتمال ظهوره مرة واحدة =

$$\subset_1^3\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{25}{36}\right)=\frac{75}{216}$$

– احتمال ظهوره مرتين=

$$\subset_2^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{15}{216}$$

– احتمال ظهوره ثلاث مرات =

$$\subset_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{216}$$

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات = واحد وذلك لأن هذه الحالات شاملة ومتنافية كما نلاحظ أن هذه النتائج هي الحدود المتتالية في مفكوك المقدار ثنائي الحدين

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^3$$

ثانياً : التجارب المتكررة غير المستقلة

في الجزء السابق درسنا الاحتمالات في حالة التجارب المتكررة تحت نفس الظروف، أي في الحالات المستقلة ذات الاحتمال الثابت، وفي هذا الجزء سندرس الاحتمالات في حالة التجارب المتكررة والتي يتغير فيها احتمال وقوع الحادث من تجربة إلى أخرى، في مثل هذه الحالات نستخدم القانون الهايبرجيومتري .

❖ القانــون الهايبرجيومتري Hypregeometric Low

يمكننا أن نوضح هذا القانون بالمثال التالي:

مثال 15 :

لو أخذنا كيس بداخله N كرة متماثلة من جميع الوجوه عدا اللون هي : n_1 كرة بيضاء و n_2 كرة حمراء و n_3 كرة سوداء، وسحبنا كرات عددها R بدون إعادة والمطلوب حساب احتمال أن يكون من بين الكرات المسحوبة r_1 كرة بيضاء و r_2 كرة حمراء و r_3 كرة سوداء.

الحـل:

يتم اختيار R كرة من الكيس بطرق عددها $\subset_{R}^{N}$، وهو عدد الحالات الممكنة، يتم الحادث بسحب r_1 كرة بيضاء من الكرات البيضاء الـ n_1 وهذا يتم بطرق عددها $\subset_{r_1}^{n_1}$، وسحب r_2 كرة حمراء من الكرات الحمراء الـ n_2 وهذا يتم بطرق عددها $\subset_{r_2}^{n_2}$، وسحب r_3 كرة سوداء من الكرات السوداء n_3 وهذا يتم بطرق عددها $\subset_{r_3}^{n_3}$، أي أن الحادث يتم بطرق عددها

$$\left(\subset_{r_1}^{n_1}\right)\left(\subset_{r_2}^{n_2}\right)\left(\subset_{r_3}^{n_3}\right)$$

وهذا هو عدد الحالات المواتية

$$\text{وبالتالي يكون الاحتمال} = \frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

$$\frac{\subset_{r_1}^{n_1}\ \subset_{r_2}^{n_2}\ \subset_{r_3}^{n_3}}{\subset_{R}^{N}}$$

حيث

$$R = r_1 + r_2 + r_3$$

$$N = n_1 + n_2 + n_3$$

ويمكننا أن نعمم النتيجة فنقول :

إذا كان لدينا كيس بداخله N كرة متماثلة، منها n_1 كرة من اللون الأول و n_2 كرة من اللون الثاني و ... و n_z كرة من اللون Z وسحبنا دون إعادة R كرة، فإن احتمال أن يكون من بين الكرات المسحوبة r_1 كرة من اللون الأول و r_2 من اللون الثاني و ... و r_z من اللون z هو :

$$\frac{C_{r_1}^{n_1} C_{r_2}^{n_2} \cdots C_{r_z}^{n_z}}{C_R^N}$$

وهذه الصيغة تدعى بالقانون الاحتمالي الهايبرجيومتري

مثال 16:

قاعة فيها 10 طلاب و 5 طالبات أخذت عينه عشوائية حجمها 20% فما هو احتمال:

i) أن تتكون من طالبين وطالبة.

ii) أن تحتوي على طالبات.

الحل:

i) بتطبيق القانون الهايبرجيومتري يكون احتمال طالبين وطالبة =

$$\frac{C_2^{10} C_1^{5}}{C_3^{15}} = \frac{225}{455}$$

ii) احتمال أن تحتوي على طالبات يعني أن تحتوي على طالبة على الأقل وهذا يساوي واحد ناقص احتمال أن يكونوا جميعاً من الطلاب

$$= 1 - \frac{C_3^{10} C_0^{5}}{C_3^{15}} = \frac{335}{455}$$

أو هو احتمال أن تحتوي على طالبة أو طالبتين أو ثلاث طالبات

$$\frac{C_1^5 C_2^{10} + C_2^5 C_1^{10} + C_3^5 C_0^{10}}{C_3^{15}} = \frac{335}{455}$$

6.2 التوقع الرياضي واستخداماته الاقتصادية Expectation

التوقع الرياضي هو وسيلة الغرض منها ربط نظرية الاحتمالات بالمسائل المالية، فإذا افترضنا أن P ترمز إلى احتمال نجاح شخص في مغامرة ما، و X ترمز إلى قيمة المبلغ الذي يحصل عليه عند نجاحه، فإن حاصل ضرب P.X يسمى بتوقع الشخص أو أمله من هذه المغامرة.

∴ التوقع = مقدار الرهان × احتمال الكسب

ونرمز للتوقع بالرمز E

$$E = P.X$$

هذا وإذا كان المبلغ χ يستحق الدفع بعد n من الزمن وكانت i هي معدل الفائدة فإن القيمة الحالية للتوقع =

$$P.X\ (1+i)^{-n} = \frac{P.X}{(1+i)^n}$$

مثال 17 :

في لعبة من ألعاب الرهان، يربح اللاعب 5 دنانير إذا سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق اللعب (52 ورقة) وكانت الورقة المسحوبة من النوع "سباتي"، فما هو الثمن العادل الذي يجب دفعه لقاء كل عملية سحب؟

الحل:

احتمال الربح = احتمال سحب ورقة "سباتي" = $\frac{1}{4}$

فإذا ضربنا هذا الاحتمال بقيمة الجائزة أمكننا الحصول على قيمة التوقع وهو الثمن العادل لكل سحبه

$$E = P.X.$$

$$= {}^{1}/_{4}\ (5) \ = \ 1.25$$

أي أن السعر العادل لكل سحبه يساوي دينار وربع الدينار.

مثال 18:

كم يبلغ التوقع الرياضي (أي مقدار الرهان) المنتظر أن يدفعه لاعب يرغب في كسب رهان قدره 100 دينار إذا كان احتمال الكسب 0.40 ؟

الحل: التوقع الرياضي

$$E = P.X. \ = \ \frac{40}{100} \times 100 \ = 40$$

مثال 19:

وبفرض أن قيمة الرهان المذكور في المثال السابق تستحق الدفع بعد 5 سنوات وكان سعر الفائدة 3.5%

فإن القيمة الحالية للتوقع الرياضي =

$$E = \frac{P.X}{(1+i)^n}$$

$$= \frac{40}{(1.035)^5}$$

$$= \frac{40}{1.1876862}$$

$$=33.6789$$

$$= 33.7$$

ومعنى هذا انه إذا استمرت الجهة التي تعهدت بدفع قيمة الرهان إلى الفائزين بتحصيل الاشتراكات السنوية من اللاعبين وقدر كل منها 33.7 دينارا ولمدة خمس سنوات فإن جملة هذه الاشتراكات (بواقع فائدة سنوية مركبة 3.5%) تكون كافية لدفع مبلغ قيمة الرهان وهي 100 دينار لكل فائز بعد 5 سنوات.

❖ علاقـة التوقـع بالتأمين على الحيـاة

لما كانت قيمة شراء التوقع الرياضي هي المبلغ الذي يجوز المغامرة به في كل محاولة لكسب مبلغ متوقع هو قيمة الرهان، فإن فكرة التوقع الرياضي هذه تعتبر أساس فكرة التأمين على الحياة، إذ أن شركات التأمين تتعهد بدفع قيمة الرهان (المبلغ المؤمن عليه) للاعبين (المأمنين) الذين يقومون بدفع القيمة الحالية للتوقع الرياضي لها بغرض التأمين لديها.

مثال 20: ما هي القيمة الحالية للتوقع الرياضي على أساس الفائدة المركبة بمعدل 3.5% سنوياً التي يسددها شخص في سن العشرين لشركة تأمين تعهدت بأن تدفع له مبلغ 2000 دينار إذا بلغ سن الأربعين؟

الحـل:

أن قيمة احتمال البقاء على قيد الحياة يمكن أخذها أو حسابها من جداول الحياة التي تعرف باسم "جداول الخبرة الأمريكية للحياة" وهي جداول 7 ، 8 ، 9 من الجداول المالية التي طبعت في أميركا عام 1867 ولا يزال العمل بها جارياً حتى الآن، وهي محسوبة لدفعة نظرية عددها 100000 شخص.

احتمال البقاء على قيد الحياة =

$$P = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

حيث l_x هي عدد الباقين على قيد الحياة عند العمر x

l_{x+n} هي عدد الباقين على قيد الحياة عند العمر x + n

من جداول الحياة الأميركي رقم 7

$$P = \frac{l_{40}}{l_{20}} = \frac{78106}{92637} = 0.84314$$

القيمة الحالية للتوقيع الرياضي هي

$$\frac{P.X}{(1+i)^n}$$

$$= \frac{0.84314 \times 2000}{(1.035)^{20}} = \frac{1686.28}{1.9897877} = 847.467$$

ومعنى هذا أن على كل شخص في سن العشرين من المؤمنين على حياتهم أن يدفع إلى شركة التأمين قسطا سنويا قيمته 847.467 دينار، مقابل تعهدها بأن تدفع له مبلغ 2000 دينار إذا بلغ سن الأربعين، وذلك لأن الشركة باستثمارها هذه الاشتراكات أو الأقساط بسعر 3.5% سنوياً لمدة 20 سنة فإنه سيكون لديها رأسمال يكفي لدفع مبلغ 2000 دينار لكل من يظل حياً من المشتركين حتى سن الأربعين.

❖ علاقة التوقع باختيار الاستثمارات

ان تطبيق قاعدة التوقع في اختيار الاستثمارات تقوم على أساس حساب القيم الحالية للدخول المتوقعة، ثم بعد ذلك تقوم بطرح المبالغ المستثمرة من مجموع القيم الحالية للدخول المتوقعة وحساب التوقع للناتج.

مثال 21 :

يود شخص في استثمار مبلغ 1000 دينار في أحد المشاريع الصناعية التي يقدر لها عمراً استثمارياً قدره سنتان حيث أن احتمالات الربح أو الخسارة في كل من السنتين هي كما يلي:

السنة الأولى 1- احتمال عدم الحصول على أي مردود هو ½

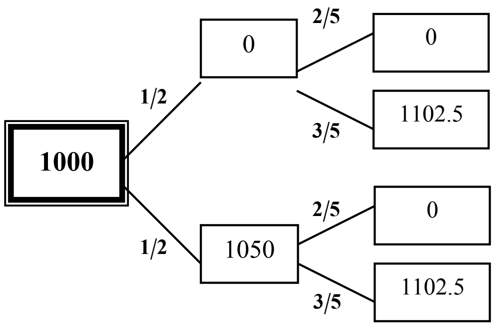
2- احتمال الحصول على مردود قدره (1050) دينار هو ½

السنة الثانية 1- احتمال عدم الحصول على أي مردود هو $\frac{2}{5}$

2- احتمال الحصول على مردود قدره (1102.5) دينار هو $\frac{3}{5}$

فإذا علمنا أن معدل الفائدة المعمول به في الأسواق المالية هو 5%، فهل ينصح هذا الشخص باجراء الاستثمار أم لا؟

الحـل: لاتخاذ قرار حول إجراء الاستثمار أو عدم إجرائه علينا أولاً أن نقوم بتمثيل المشكلة بيانيا كما يلي:



وبعد ذلك نقوم بحساب القيم الحالية للدخل المتوقع الحصول عليه وحسب مختلف الاحتمالات، ومن ثم نطرح منها قيمة المبلغ المستثمر وذلك كما يلي:

1. $0 - 1000 \quad = -1000$

2. $\frac{1102.5}{(1.05)^2} - 1000 \quad = \quad 0$

3. $\frac{1050}{1.05} - 1000 \quad = \quad 0$

$$4.\quad \frac{1102.5}{(1.05)^2}+\frac{1050}{1.05}-1000 \;=\; 1000$$

وبعد ذلك نقوم بحساب الاحتمالات وذلك كما يلي:

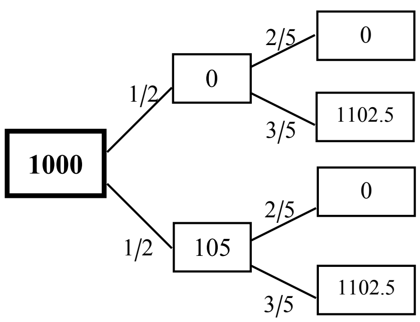
$$\text{الاحتمال الأول} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{10}$$

$$\text{الاحتمال الثاني} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

$$\text{الاحتمال الثالث} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{10}$$

$$\text{الاحتمال الرابع} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3}{10}$$

بعد أن قمنا بحساب القيم الحالية لمختلف الدخول المتوقعة والاحتمالات المقابلة لها فانه يمكننا حساب التوقع أي الدخل المتوقع وذلك كما يلي:



القيمة الحالية للدخل	الاحتمال	التوقع
−1000	2/10	−200
0	3/10	0
0	2/10	0
1000	3/10	300
		100

بما أن قيمة التوقع للدخل المتوقع الحصول عليه موجبه وتعادل 100 وحدة نقدية إذا فأننا ننصح هذا الشخص بإجراء الاستثمار.

7.2 تماريــن الفصـل الثاني / الاحتمالات

1. سحبت ورقتان من مجموعة أوراق اللعب (52 ورقة) بحيث تعاد الورقة الأولى قبل سحب الثانية.

أحسب الاحتمالات الآتية:

I. أن تكون الورقتان المسحوبتان من اللون الأسود $\left(\frac{1}{4}\right)$

II. أن تكون الورقتان المسحوبتان من شكل معين (ديناري) $\left(\frac{1}{16}\right)$

III. أن تكون الورقتان المسحوبتان من نفس الشكل $\left(\frac{1}{4}\right)$

2. لدينا ثلاثة أزواج من الأشخاص المتزوجين، اخترنا من كل زوج فرداً واحداً بدون تحيز فما هو احتمال :

I. أن يكون الأفراد الثلاثة المختارون من جنس واحد $\left(\frac{1}{4}\right)$

II. أن يكونوا رجلين وامرأة $\left(\frac{3}{8}\right)$

3. رميت قطعة نقود خمس مرات أحصر النتائج الممكنة ، وأحسب احتمال كل منها.

4. ما هو احتمال ظهور ثلاثة صور في رمية واحدة لثلاثة قطع من النقود؟ $\left(\frac{1}{8}\right)$

5. يقوم شخص برمي قطعة نقود فإذا حصل على صورة وضع ثلاث كرات سوداء في صندوق أما إذا حصل على كتابة فأنه يضع كرتين سوداء وكرة بيضاء. فإذا كرر الشخص هذه العملية n مرة ثم سحب كرة من الصندوق. فاحسب احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء $\left(\frac{1}{6}\right)$

6. كيسان الأول به 5 كرات متماثلة، منها ثلاث كرات حمراء وكرتان بيضاوان، والثاني به 7 كرات منها ثلاث كرات حمراء وأربع كرات بيضاء، سحبت كرة من كل كيس فما هو احتمال أن تكون واحدة منهما على الأقل بيضاء؟

(26/35)

7. كيس يحتوي على 3 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء و3 كرات سوداء من حجم واحد سحبت 3 كرات عشوائياً وبدون إعادة ، فما هو احتمال أنها ستكون من لون واحد؟

(1/10)

8. كيس به 12 كرة متماثلة منها 5 كرات بيضاء و3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء، سحبت 3 كرات من الكيس أحسب الاحتمالات الآتية:

I. احتمال عدم ظهور كرات حمراء (21/55)

II. احتمال ظهور كرة واحدة حمراء (27/55)

III. احتمال أن تكون كرة واحدة حمراء على الأقل (34/55)

IV. احتمال أن تكون الكرات كلها من لون واحد (3/44)

V. احتمال أنه ليس هناك كرتان أو أكثر من لون واحد (3/11)

9. بيع في أحد الحفلات 100 بطاقة بسعر دينار واحد للبطاقة الواحدة، وخصصت جائزة قدرها 50 دينار للبطاقة الفائزة فهل كان سعر البطاقة عادلا أم لا؟

10. كيس به 100 كرة متماثلة عدا اللون، منها 45 كرة بيضاء و 30 كرة حمراء و25 كرة سوداء، سحبت كرة وسجل لونها وأعيدت إلى الكيس ثم سحبت كرة ثانية وسجل لونها وأعيدت إلى الكيس ثم سحبت كرة ثالثة ما هو احتمال أن تكون ألوان الكرات الثلاث المسحوبة على الترتيب أبيض ، أسود، وأحمر؟

(0.03375)

11. سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب (52 ورقة) ثم أعيدت وسحبت ورقة ثانية، أحسب الاحتمالات التالية:

I. أن تكون الورقة الثانية من نفس لون الورقة الأولى (1/2)

II. أن تكون الورقة الثانية هي نفس الورقة الأولى (1/52)

III. أن تحمل كل من الورقتين نفس العدد (10/169)

IV. أن تحمل كل من الورقتين نفس العدد أو نفس الصورة (1/13)

V. أن تحمل كل من الورقتين نفس الصورة (3/169)

12. رميت قطعة نقود 3 مرات متتالية

i. ما هو احتمال الا تحدث صورتان متتاليتان في الرميات الثلاثاء

(5/8)

ii. ما هو احتمال الا تحدث صورتان متتاليتان أو كتابتان في الرميات الثلاث

(1/4)

13. إذا كان احتمال أن يتأخر أياس عن عمله $\frac{2}{3}$ إذا ذهب إلى العمل ماشياً، و $1/4$ إذا ذهب بالحافلة و $1/6$ إذا ذهب بسيارته، فما هو احتمال أن يتأخر عن عمله في صباح أحد الأيام إذا اختار وسيلته بطريقة عشوائية؟ (13/36)

14. إذا كان لدينا صندوقين: الأول يحتوي على 5 مناديل معيبة و 8 مناديل سليمة، والثاني يحتوي على 6 مناديل معيبة و 11 سليمة، فما هو احتمال أن يكون المنديل المسحوب عشوائياً من أحد الصندوقين معيباً ؟

(0.36878)

15. لتكن التجربة هي اختيار عائله لديها أربعة أطفال، وتسجيلهم حسب الجنس وتسلسل الولادة، اكتب الفراغ العيني لهذه التجربة ثم احسب الاحتمالات التالية:

I. عند العائلة بنت واحدة (1/4)

II. عند العائلة أكثر من بنتين (5/16)

III. عند العائلة 3 بنات على الأكثر (15/16)

16. تقدمت إحدى شركات البناء إلى مناقصتين B , A فإذا كان احتمال أن تحصل على المناقصة A هو 0.6، واحتمال أن تحصل على المناقصة B هو 0.3، واحتمال أن تحصل على المناقصتين معاً هو 0.1 فما هو احتمال أن تحصل الشركة على المناقصة A أو المناقصة B

(0.8)

17. دع A , B حادثين في الفراغ العيني S حيث

$$P(AB)=\frac{1}{5} \qquad P(B/A)=\frac{1}{2} \qquad P(A/B)=\frac{1}{3}$$

أوجد $P(A)$, $P(B)$

$$\left(\frac{3}{5} \;,\; \frac{2}{5}\right)$$

18. في أحد مصانع المصابيح الكهربائية إذا كانت الماكنات M_1 و M_2 و M_3 تصنع على الترتيب 0.30 و 0.30 و 0.40 من مجموع الإنتاج، وإذا كان 1 و 3 و 2 بالمئة من إنتاج الماكينات الثلاث على الترتيب هو إنتاج معيب، سحب مصباحا عشوائياً من إنتاج أحد الأيام وجد أنه معيب، فما هو احتمال أن يكون هذا المصباح من صنع الماكينة M_1 ؟ من صنع M_2؟ من صنع M3؟ (8/20 ، 9/20 ، 3/20)

19. إذا سحبنا 5 ورقات من مجموعة أوراق اللعب (52 ورقة) بدون إعادة، فما هو احتمال احتواء هذه الأوراق الخمسة على ورقة واحدة بها صورة شايب؟

(3243/10829)

20. الماكينة 1 تنتج 60% من إنتاج مصنع البطاريات الجافة، والماكينة 2 تنتج الباقي. 5% من إنتاج الماكينة 1 معيب، بينما 2% من إنتاج الماكينة 2 معيب، فما هو احتمال ان تكون بطارية معيبة قد صنعت في الماكينة 1؟

(30/38)

8.2 حل تمارين الفصل الثاني / الاحتمالات

.1

i) $\frac{26}{52} \cdot \frac{26}{52} = \frac{1}{4}$

ii) $\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{16}$

ii) $\left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) = \frac{1}{4}$

2. عدد الحالات الممكنة هو = 2^3 ، وهي كما في الرسم

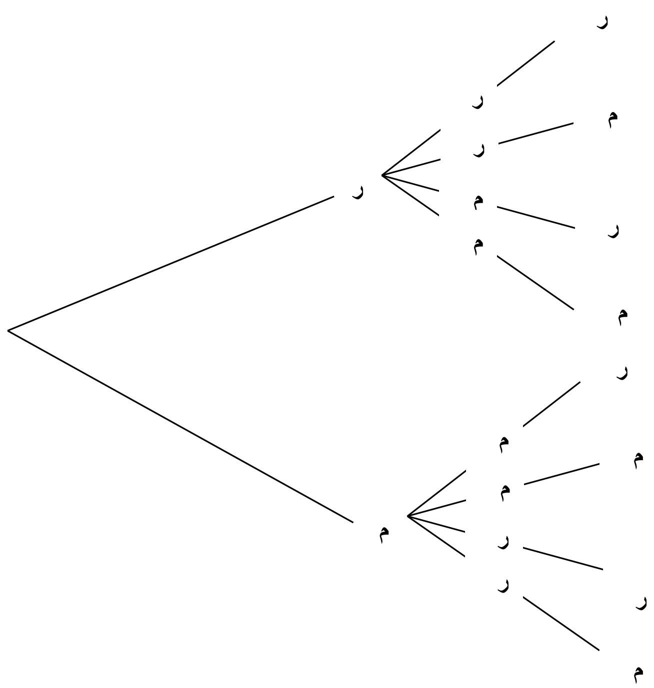
i) احتمال الحصول على الثلاثة من جنس واحد ، أي 3 رجال أو 3 نساء.

من الرسم

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

أو

$$(1/2 . 1/2 \ . \ 1/2) + (1/2 \ . \ 1/2 \ . \ 1/2) = \frac{1}{4}$$



ii) احتمال الحصول على رجلين وامراة

من الرسم

$$\frac{\text{الحالات المواتية}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{3}{8}$$

أو

$$= \frac{C_2^3}{8} = \frac{3}{8}$$

3. الحالات الممكنة

$$2^5 = 32$$

احتمالات الصورة = احتمالات الكتابة =

$C_5^5 \div 32 = 1/32$

$C_4^5 \div 32 = 5/32$

$C_3^5 \div 32 = 10/32$

$C_2^5 \div 32 = 10/32$

$C_1^5 \div 32 = 5/32$

$C_0^5 \div 32 = 1/32$

.4

p (ص ص ص) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot = \frac{1}{8}$

5. عدد الكرات الناتجة عن اللعبة = 3n لأنه يضع 3 كرات مع كل رمية، احتمال الحصول على صورة = احتمال الحصول على كتابة = 1/2

∴ عدد المرات التي يضع فيها 3 كرات سوداء = عدد المرات التي يضع فيها كرتين سوداوين وكرة بيضاء ويساوي $\frac{n}{2}$

∴ عدد الكرات البيضاء =

$$\frac{n}{2} \times 1 = \frac{n}{2}$$

عدد الكرات السوداء =

$$\frac{n}{2} \times 3 + \frac{n}{2} \times 2 = \frac{5n}{2}$$

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء = $\frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

$$= \frac{n}{2} \div 3n$$
$$= \frac{n}{2} \times \frac{1}{3n} = \frac{1}{6}$$

6. الحالات الممكنة الحصول هي:

بيضاء	حمراء
حمراء	بيضاء
بيضاء	بيضاء
حمراء	حمراء

احتمال أن تكون كره على الأقل بيضاء = واحد ناقص احتمال أن تكون الكرتان حمراوان

$$1 - \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7}\right) = 1\text{-}\frac{9}{35} = \frac{26}{35}$$

حل آخر

احتمال أن تكون كره على الأقل بيضاء = احتمال الأولى بيضاء والثانية حمراء

أو الأولى حمراء والثانية بيضاء

أو الأولى بيضاء والثانية بيضاء

$$= \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7}\right)$$
$$= \frac{26}{35}$$

7. الاحتمال المطلوب = احتمال أن تكون الثلاث كرات بيضاء او الثلاث حمراء أو الثلاث سوداء

$$P = \left(\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}\right) + \left(\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}$$

أو $$= \frac{C_3^3 + C_3^6 + C_3^3}{C_3^{12}} = \frac{1}{10}$$

8. الحالات الممكنة

$$C_3^{12} = 220$$

i) P (عدم ظهور كرات حمراء) $$= \frac{C_3^9 \quad C_0^3}{C_3^{12}}$$

$$= \frac{84}{220} = \frac{21}{55}$$

ii) P (كرة واحدة حمراء) $$= \frac{C_1^3 \quad C_2^9}{C_3^{12}}$$

$$= \frac{27}{55}$$

iii) P (كرة واحدة على الأقل حمراء) $$= \frac{C_1^3 \; C_2^9}{C_3^{12}} + \frac{C_2^3 \; C_1^9}{C_3^{12}} + \frac{C_3^3 \; C_0^9}{C_3^{12}}$$

$$= \frac{34}{55}$$

أو

= 1−P (عدم ظهور كرة حمراء)

$$= 1 - \frac{21}{55}$$

$$= \frac{34}{55}$$

iv) P (الكرات كلها من نفس اللون) $= \dfrac{C_3^5 + C_3^4 + C_3^3}{C_3^{12}}$

$= \dfrac{3}{44}$

v) P (عدم وجود كرتين من نفس اللون) $= \dfrac{C_1^5 \cdot C_1^4 \cdot C_1^3}{C_3^{12}} = \dfrac{3}{11}$

.9 السعر = الاحتمال × قيمة الجائزة

$= \frac{1}{100} \times 50$

$= \frac{1}{2}$

$\therefore$ السعر العادل يجب أن يكون نصف دينار

$\therefore$ سعر البطاقة غير عادل.

.10 الاحتمال المطلوب

$$P = \frac{45}{100} \cdot \frac{25}{100} \cdot \frac{30}{100}$$

$$= 0.03375$$

.11

i) نفس احتمال الحصول على اللون في الورقة الأولى

$= 1/2$ لأن هناك لونين فقط أحمر وأسود

ii) نفس احتمال الورقة الأولى $= \frac{1}{52}$

الاحتمال المطلوب = احتمال أن تكون الورقتين

1 أو 2 أو ... أو 10

$$= \left(\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52}\right)+\left(\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52}\right)+\ldots$$
$$= 10\left(\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52}\right)$$
$$= \frac{10}{13^3}$$
$$= \frac{10}{169}$$

iii) $= 13\left(\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52}\right) = \frac{1}{13}$

.12 i) عدد الحالات الممكنة 8

$$S = \left\{\begin{matrix}\text{ص ك ك، ص ك ص ، ص ص ك ، ص ص ص}\\ \text{ك ص ص ، ك ص ك ، ك ك ص ، ك ك ك}\end{matrix}\right\}$$

عدد الحالات المواتية 5

∴ الاحتمال المطلوب $= \frac{5}{8}$

ii) $P = \frac{2}{8}$

$= \frac{1}{4}$

.13 احتمال كل من الاختيارات الثلاثة = $(1/3)$

الاحتمال المطلوب هو احتمال الذهاب ماشياً ويتأخر أو الذهاب بالحافلة ويتأخر أو الذهاب بسيارته ويتأخر

$$P\ (\text{التأخير}) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{13}{36}\right)$$

.14 احتمال اختيار أي صندوق $= 1/2$

احتمال أن يكون قد سحب من الصندوق الأول ومعيب $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{13}$

احتمال أن يكون قد سحب من الصندوق الثاني ومعيب $= \frac{1}{2} \times \frac{6}{17}$

$$P\ (\text{معيب}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{17}\right)$$

$$= 0.36878$$

.15 $S = 2^4 = 16$

i) $P\ (\text{بنت واحدة}) = \frac{C_1^4}{16}$

ii) $P\ (\text{أكثر من بنتين}) = \frac{C_3^4 + C_4^4}{16}$

iii) $P\ (\text{ثلاث بنات على الأكثر}) = 1 - \frac{C_4^4}{16}$

$$= \frac{15}{16}$$

أو بتطبيق قانون ثنائي الحدين

$$= \frac{C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 + C_3^4}{16}$$

.16

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= 0.6 + 0.3 - 0.1$$

$$= 0.8$$

.17

$$P(AB) = P(A)\ P(B/A)$$

$$= P(B)\ P(A/B)$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{P(AB)}{P(B/A)} = \frac{1/5}{1/2} = \frac{2}{5}$$

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A/B)} = \frac{1/5}{1/3} = \frac{3}{5}$$

.18 لتكن

$P(D)$ = احتمال أن يكون المصباح معيبا

$P(M_1)$ = احتمال أن يكون المصباح من صنع M_1

$P(M_2)$ = احتمال أن يكون المصباح من صنع M_2

$P(M_3)$ = احتمال أن يكون المصباح من صنع M_3

بيانات المسألة تعطي الاحتمالات الآتية

$P(M_1) = 0.3 \quad P(D/M_1) = 0.01$

$P(M_2) = 0.3 \quad P(D/M_2) = 0.03$

$P(M_3) = 0.4 \quad P(D/M_3) = 0.02$

دعنا الآن نحسب الاحتمالات التالية

$P(M_1D) = P(M_1)\ P(D/M_1) = (0.3)\ (0.01) = 0.003$

$P(M_2D) = P(M_2)\ P(D/M_2) = (0.3)\ (0.03) = 0.009$

$P(M_3D) = P(M_3)\ P(D/M_3) = (0.4)\ (0.02) = 0.008$

هذه الاحتمالات جميعاً يمكن تمثيلها بيانيا.

باستخدام نظرية بيز

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1D)}{P(M_1D)+P(M_2D)+P(M_3D)}$$

$$= \frac{0.003}{0.003+0.009+0.008} = \frac{3}{20}$$

$$P(M_2/D) = \frac{P(M_2D)}{P(M_1D)+P(M_2D)+P(M_3D)}$$

$$= \frac{0.009}{0.020} = \frac{9}{20}$$

$$P(M_3/D) = \frac{0.008}{0.020} = \frac{8}{20}$$

ويمكن تلخيص الاحتمالات السابقة بالجدول التالي:

الاحتمال البعدي	الاحتمال المركب	الاحتمال الشرطي	الاحتمال القبلي	الحادث
3/20	0.003	0.01	0.30	M_1
9/20	0.009	0.03	0.30	M_2
8/20	0.008	0.02	0.40	M_3
1.00	**0.020**		**1.00**	**المجموع**

19. باستخدام القانون الهايبرجيومترى

$$P\ (\text{شايب واحد}) = \frac{C_1^4 \quad C_4^{48}}{C_5^{52}}$$

$$= \frac{3243}{10829}$$

حل آخر هناك خمس حالات متنافية لوقوع هذا الحادث تختلف عن بعضها في ترتيب سحب ورقة الشايب، لنأخذ الحالة الأولى التي يظهر فيها الشايب من أول سحب، في هذه الحالة يكون الاحتمال =

$$\frac{4}{52} \times \frac{48}{51} \times \frac{47}{50} \times \frac{46}{49} \times \frac{45}{48} = \frac{4243}{54145}$$

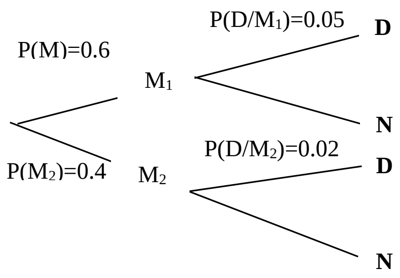
وحيث أن الحالات الخمس متماثلة فان الاحتمال المطلوب هو

$$5 \times \frac{3243}{54145} =$$

$$= \frac{3243}{10829}$$

.20

$$P(M_1D) = P(M_1)\,P(D/M_1)$$
$$= 0.60 \times 0.05 = 0.03$$



$$P(M_2D) = P(M_2)\,P(D/M_2)$$
$$= 0.40 \times 0.02 = 0.008$$

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1D)}{P(M_1D) + P(M_2D)_2}$$

$$= \frac{0.03}{0.03 + 0.008}$$

$$= \frac{0.03}{0.038} = \frac{30}{38}$$

$$= 0.789\,5$$

الفصل الثالث

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

RANDOM VARIABLES AND PROBABILITY DISTRIBUTIONS

1.3 المتغير العشوائي RANDOM VARIABLES

مر معنا في الفصل السابق عدة تجارب مثل حذف زهرة النرد أو رمي قطعة النقد أو سحب كره أو سحب ورقة من أوراق اللعب ... الخ، ان النتائج التي يمكن الحصول عليها بتجارب عشوائية رقمية كانت كما في حالة النرد، أو نوعية كما في الكرات وقطعة العملة وورق اللعب وغيرها، تدعى بالمتغيرات العشوائية.

المتغير العشوائي **هو المتغير الذي يتم الحصول على قيمته نتيجة لتجربه عشوائية**

المتغير العشوائي يمكن أن يكون متقطعا DISCRETE أو متصلاً CONTINOUNS

المتغير المتقطع:

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة من قيم الأعداد الصحيحة مثل 1 ، 2 ، 3 ، ...

أمثلة على المتغير المتقطع :

- عدد أفراد الأسرة في عينة إحصائية مكونه من عده أسر
- عدد الأهداف المسجلة لفريق رياضي خلال الدورى العام
- عدد السيارات المباعه في الشهر لإحدى شركات السيارات ... الخ

المتغير المتصل:

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ أي قيمة داخل مدى معين، مثل مقاييس الطول والوزن والزمن والقيمة.

أمثلة على المتغير المتصل:

- المبيعات الشهرية من الحليب لإحدى مؤسسات الألبان
- أطوال طلبة الجامعة
- أوزان طلاب الصف الأول الابتدائي في إحدى المدارس
- أثمان البرميل الواحد للنفط الكويتي خلال السنة الأخيرة ... الخ.

2.3 التوزيـعات الاحتماليـة المتقطعة Discrete Probability Distributions

إذا رمينا زهره نرد فإنه يمكننا ان نمثل النتائج الممكنة واحتمالات كل منها بالجدول التالي:

الوجه	1	2	3	4	5	6
الاحتمال	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

وإذا رمينا زهرتي نرد وكنا مهتمين بمجموع وجهي الزهر فانه يمكننا أن نمثل النتائج الممكنة واحتمال كل منها بالجدول التالي:

المتغير العشوائي مجموع الوجهين	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

هذا الجدول الذي يتضمن قيم المتغير الشعوائي والاحتمالات المناظرة لها يسمى بالتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع، وهكذا فإن :

التوزيع الاحتمالي لمجموعة القيم المتقطعة التي يأخذها متغير عشـــوائي متقطع، هو الجدول أو القائمة التي تتضـــمن جميع القيم الممكنة لهذا المتغير مع الاحتمال الخاص بكل منها.

3.3 دالة كثافة الاحتمال Probabily Density Function (P.D.F.)

إذا كان لدينا متغير متقطع X يأخذ قيما مختلفة x_1 , x_2 , x_3 ... x_n باحتمال $P(X=x_i)$ حيث $i = 1, 2 ... n$ فإن هذا الاحتمال يسمى بالداله الاحتمالية، أو كثافة الاحتمال ويرمز لها بالرمز $f(x_i)$.

وهكذا فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي x هي الاحتمال بأن يأخذ x أي قيمة من قيمة الممكنة، أي $P(X=xi)$ ويرمز لها بالرمز $f(x)$ على أن يتحقق ما يلي: i) $f(x) \geq 0$ ii) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

وتأخذ داله كثافة الاحتمال للمتغير المتقطع X الشكل التالي:

X = x	x_1 x_2 ....x_n
f(x) = P (X=x)	$f(x_1)$ $f(x_2)$ ....$f(x_n)$

مثـال 1 :

إذا كان لدينا المتغير العشوائي المتقطع X وهو عدد مرات الحصول على وجه الكتابة عند رمي قطعة نقدية مرتين، فإن :

الحالات الممكنة أو الفراغ العيني = { صـ صـ، صـ ك، ك صـ ، ك ك }

القيم الممكنة ل X هي 0 ، 1 ، 2

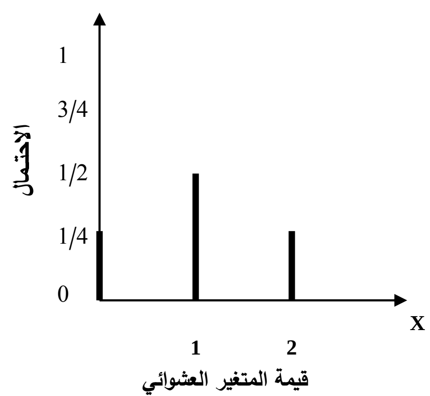
أذن

$$f(x) = P(X = x)$$
$$f(0) = P(X = 0) = 1/4$$
$$f(1) = P(X = 1) = 1/2$$
$$f(2) = P(X = 2) = 1/4$$

ويكون التوزيع الاحتمالي لقيم X الممكنة هو كما يلي:

X = x	0	1	2
f(x) = P(X=x)	1/4	1/2	1/4

ويمكن رسم هذا الجدول بيانيا كما يلي:



4.3 دالـة التوزيـع الاحتمالي Probability Distribution

لكننا في الغالب لا نهتم فقط باحتمال أخذ المتغير العشوائي لقيمة واحدة من قيمة الممكنة، وإنما نهتم أيضاً باحتمال أخذ المتغير X لقيمة أقل من أو تساوى قيمة ما من قيمة الممكنة، وهذه الدالة ندعوها بداله التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي الاحتمال بأن X أقل من أو تساوي x أي $P(X \le x)$ **ويرمز لها بالرمز F(x) ويكون** $$F(x) = P(X \le x) = \sum_{xi \le x} f(xi)$$

5.3 التوزيعات الاحتمالية المتصلة Continuous Probability Distribution

يمكننا أيضاً أن نعرف التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل بأنه الجدول أو القائمة الذي يبين لنا القيم المختلفة لهذا المتغير المتصل والاحتمال الخاص بكل قيمة من هذه القيم.

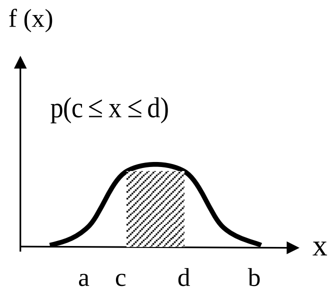
مثال 2 :

نفرض أن لدينا آلة ميكانيكية تملأ أكياسا من القهوة، زنه كل كيس باوند واحد من القهوة، ولكن لوجود خلل في أحد المراحل الميكانيكية، يختلف الوزن من كيس إلى آخر، فوزن الكيس هنا متغير عشوائي متصل والجدول التالي يعطي وزن 100 كيس مملوءه بهذه الطريقة :

قيمة المتغير العشوائي X	عدد الاكياس (التكرارات)	الاحتمال f (x)
0.90	1	0.01
0.95	7	0.07
0.99	25	0.25
1.00	32	0.32
1.01	30	0.30
1.05	5	0.05
	100	**1.00**

فلو أردنا أن نعرف قيمة احتمال اختيار كيس عشوائيا بوزن يتراوح ما بين أي قيمتين لنقل 0.95 و 1.05 فان عدد القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي تكون غير محدودة، ولذلك لا يمكننا أن نعالج المشكلة في حالة المتغير المتصل كما هو الحال في حاله المتغير المتقطع، على كل حال فان مفهوم المساحة وخواصها تمكننا من تحديد الاحتمالات في حاله المتغيرات العشوائية المتصلة.

ليكن X متغيرا متصلاً يقع في المدى (ab) أي $a \le x \le b$ كما في الشكل التالي:



فان احتمال أن يقع المتغير العشوائي المتصل x في المدى (a, d) يرمز له بالرمز $P(c \leq X \leq d)$

ويعطي كما يلي:

$P(c \leq x \leq d) =$ المساحة المحصورة بين الدالة f(x) والمحور الأفقي والمحددة بـ $x = c$, $x = d$

أي المساحة المظللة في الشكل .

تكون f(x) دالة كثافة الاحتمال للمتغير المتصل X إذا كان :

i) $f(x) \geq 0$ f(x) موجبه

ii) $\int_R f(x)\, dx = 1$ كامل المساحة تحت المنحنى $= 1$

$$\int_a^b f(x)\, dx = 1$$

$$(a \leq x \leq b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \qquad (-\infty \leq x \leq \infty)$$

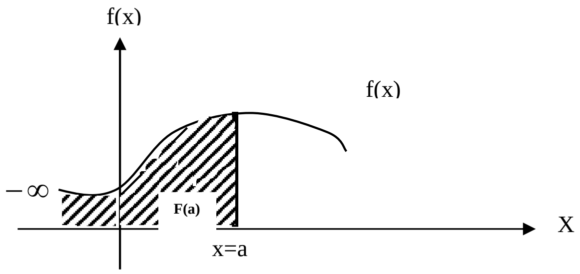
6.3 دالة كثافة الاحتمال التجميعية للمتغير العشوائي المتصل

Aggregate probability density function for a continuous random variable

هي الاحتمال بأن X أقل من او يساوي a أي $P(x \leq a)$ ويرمز لها بالرمز F (x) وهكذا

$$F(x) = P(x \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$$

وهي كما في الشكل التالي:



مثال 3:

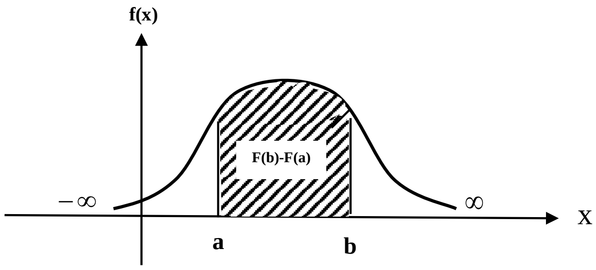
احتمال ان تقع X في المدى (a,b) يساوي

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

$$= f(b) - f(a)$$

وبالرسم :



7.3 تمـــارين الفصــل الثالث / المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

1- إذا كان c ثابت و x متغير عشوائي داله احتماله هي:

$$f(x) = c\binom{5}{x}$$

$$x = 0, 1, \ldots, 5$$

فأوجد قيمة الثابت c

2- إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السير في مدينة ما، وكانت C ثابت وداله الاحتمال X هي على الصورة التالية :

X = x	0	1	2	3	4	5
f(x) = P(X=x)	C	2C	3C	4C	1.5C	0.5C

أولا: أوجد قيمة الثابت C

ثانيا: أوجد:

i) $P(x < 3)$

ii) $P(0 < x \leq 4)$

iii) $P(0 < x < 2)$

ثالثا: اكتب داله التوزيع الاحتمالي لـ X

3- إذا ألقيت قطعة نقدية حتى تم الحصول على وجه الكتابة، وكانت X متغير عشوائي يمثل عدد المرات التي ألقيت بها قطعة النقد حتى تم الحصول على وجه الكتابة، أوجد داله احتمال المتغير X .

4- أريد اختيار أحد اشرطه التسجيل (الكاسيت) من مجموعة من 10 أشرطه، فإذا كان المتغير العشوائي X يمثل رقم الشريط المختار فأوجد داله الاحتمال لـ X .

5- إذا كان X متغير عشوائي كثافة احتماله

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

و $0 \le x \le 2$

أوجد :

i) $P(0.5 < x < 1.5)$

ii) $P(x > 0.25)$

iii) $P(x < 0.75)$

iv) $P(x > 3)$

6- إذا كانت

$$f(x) = \frac{2-x}{2}$$

و $0 < x <$

أوجد :

i) $P(0.5 < x < 1)$

ii) $P(x > 1.5)$

iii) $P(x < 0.3)$

iv) $P(0 < x < 2)$

7- في أحد الامتحانات الشفوية المكون من خمسة أسئلة، إذا كان احتمال أن يجيب أحد الممتحنين على أي سؤال أجابه صحيحة هو 0.6، ورمزنا لعدد الأسئلة التي يجيب عليها إجابات صحيحة قبل أول فشل له في الإجابة بالرمز x .

أوجد توزيع x الاحتمالي .

8- دولاب عليه ثلاثة أرقام هي 2 ، 3 ، 4، إذا أدرنا الدولاب مرتين بحيث يؤشر المؤشر في كل مرة على أحد الأرقام الثلاثة، وإذا فرضنا أن x تمثل مجموع الرقمين الناتجين، أحصر النتائج الممكنة واستنتج توزيع x الاحتمالي.

9- إذا كان احتمال أن ينجح الطالب في امتحان الإحصاء هو $\frac{1}{4}$ ، تقدم للامتحان ثلاثة طلاب، إذا فرضنا بأن x تمثل عدد الناجحين، أحصر النتائج الممكنة واستنتج التوزيع الاحتمالي لـ x .

8.3 حل تمــارين الفصــل الثالث / المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

-1

$$\sum_{a11x} f(x) = 1$$

$$\therefore \sum C \binom{5}{x} = 1$$

$$C \sum \binom{5}{x} = 1$$

$$C\ (1+5+10+10+5+1) = 1$$

$$C = 1/32$$

2 – أولا:

$$\sum_{a11x} f(x) = 1$$

$$\therefore \quad C + 2C + 3C + 4C + 1.5C + 0.5C = 1$$

$$\therefore \quad C = 1/12$$

ثانياً:

i) $P(x< 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

$= C + 2C + 3C$

$= 6C$

$= 6\ (1/12)$

$= 1/2$

ii) $P(0 < X \le 4) = P(X=1) + P(X=2) +$

$P(X=3) + P(X=4)$

$= 2C + 3C + 4C + 1.5C$

$= 10.5.\ C$

$= 10.5\ (1/12)$

$= 10.5/12$

أو

$= 1 - [(P(X=0) + P(X=5)]$

$= 1 - (C + 0.5\ C)$

$= 10.5\ C$

$= 10.5/12$

iii) $P(0 < X < 2) = P(X = 1)$

$= 2\ C$

$= 2/12 = 1/6$

ثالثاً : دالة التوزيع الاحتمالي ل x

$F(x) = P(X \le x)$

$F(0) = P(X \le 0) = 1/12$

$F(1) = P(X \le 1) = 3/12$

$F(2) = P(X \le 2) = 6/12$

$F(3) = P(X \le 3) = 10/12$

$F(4) = P(X \le 4) = 23/24$

$F(5) = P(X \le 5) = 1$

−3

$f(x) = (1/2)^x$

$x = 1, 2, \ldots$

−4

X = x	1	2	3	…………….	10
f(x) = P(X=x)	1/10	1/10	1/10	…………….	1/10

$f(x) = 1/10 \qquad x = 1, 2, \ldots, 10$

−5

i) $P(0.5 < x < 1.5) = \int_{0.5}^{1.5.} 1/2 \, dx$

$$= \left| \frac{x}{2} \right|_{0.5}^{1.5} = ½$$

ii) $P(x > 0.25) = \int_{0.25}^{2} 1/2 \, dx$

$= 7/8$

iii) $P(x < 0.75) = \int_{0.5}^{0.75} 1/2 \, dx$

$= 3/8$

iv) $P(x > 3) = \int_{3}^{\infty} 1/2 \, dx$

$= 0$

$0 \le x \le 2$ لان

6−

i) $P(05 < x < 1) = \int_{0.5}^{1} \frac{2-x}{2} \, dx$

$$= \int_{0.5}^{1} 1 - \frac{x}{2} \, dx$$

$$= \int_{0.5}^{1} x^0 \, dx - \int_{0.5.}^{1} \frac{x}{2} \, dx$$

$$= \left| x \right|_{0.5}^{1} - \left| \frac{x^2}{4} \right|_{0.5}^{1}$$

$$= 1/2 - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$$

ii) $P(x > 1.5) = \int_{1.5}^{2} \frac{2-x}{2}\,dx = \frac{1}{16}$

iii) $P(x < 0.3) = \int_{0}^{0.3} \frac{2-x}{2}\,dx$

$= 0.2775$

v) $P(0 < x < 2) = \int_{0}^{2} \frac{2-x}{2}\,dx = 1$

−7

x	0	1	2	3	4	5
p(x)	0.4	$(0.6)^1$ (0.4)	$(0.6)^2$ (0.4)	$(0.6)^3$ (0.4)	$(0.6)^4$ (0.4)	$(0.6)^5$

−8

x	4	5	6	7	8
p(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

−9

$P(x) = C_x^n \, p^x q^{n-x}$

$P(0) = \frac{27}{64}$, $P(1) = \frac{27}{64}$, $P(2) = \frac{9}{64}$

$P(3) = \frac{1}{64}$

الفصل الرابع

أدلة توصيف التوزيعات الاحتمالية

Guides for Characterizing Probability Distributions

التوقــع ، التبايــن ، والتغايــر

يمكن عن طريق بعض المعلمات (البارامترات) أن نحدد صفات المجتمع الإحصائي وأن نقارن المجتمعات الاحصائيه بعضها ببعض، ومن أهم هذه المعلمات: **التوقع** وهو يحدد مركز الموضع للمجتمع، و**التباين** وهو مقياس الانتشار، و**التغاير** وهو مقياس الارتباط بين متغيرين .

وفيما يلي نتناول دراسة هذه المعلمات :

1.4 التوقــع Expectation

إذا كان x متغير عشوائي كثافة احتماله f(x) فيعرف المقدار

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

بالتوقع. وهذا المقدار سيكون ثابتاً (لانه تكامل محدود) ولكنه يعتمد على الثوابت التي تتضمنها دالة كثافة الاحتمال f(x)

وإذا كان المتغير x متقطعا، يصبح التوقع في هذه الحالة يساوي

$$\sum_{\text{all } x} x\, P(x)$$

حيث P(x) الدالة الاحتمالية للمتغير x

سنرمز لتوقع x بالرمز E(X)، حيث الحرف E يشير إلى عملية رياضية معينة تجرى على المتغير x ومضمونها :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \mu$$

أو

$$= \sum_{\text{all } x} xP(x) = \mu$$

حسب كون المتغير x متصلا أو متقطعاً.

كما يدعى التوقع E(x) بالوسط الحسابي للتوزيع الاحتمالي، ويستخدم الحرف الإغريقي μ (ميو) في الغالب للتعبير عن القيمة المتوقعة للمتغير x .

ويلاحظ من صيغة التوقع (في حالة المتغير المتقطع مثلاً) أنها تشبه أوزاناً P(x) معلقة عند النفط x_i (i = ، 0 ، 1 , 2) والتوقع يقابل حساب مركز ثقل هذه الأوزان وهي **نقطه الاتزان** .

إذا كان x متغيراً عشوائياً فان أي دالة في x (لنقل مثلاً φ (x)) هي الأخرى متغير عشوائي وتوقعه يساوي:

$$E[\varphi(x)] = \sum_{\text{all } x} \varphi(x)\, P(x)$$

$$= \int_{\substack{\text{Range}\\ x}} \varphi(x)\, f(x)\, dx$$

حسب كون x متقطعاً أو متصلاً .

لنأخذ $\varphi(x) = x^r$

يكون

$$E(x^r) = \sum_{\text{all } x} x^r \; P(x)$$

$$= \int_{Rx} x^r \, f(x) \, dx$$

ولنجعل $r = 1$

يكون

$$E(X) = \sum_{\text{all } x} x \; P(x) = \mu$$

$$= \int_{Rx} x \, f(x) \, dx = \mu$$

مثـال 1 :

ألقيت قطعة نقد معدنية ثلاث مرات متتالية، فما هو التوقع الرياضي لعدد مرات ظهور "صورة"؟

الحـل

يمكننا أن نمثل الفراغ العيني والاحتمالات المناظرة في الجدول التالي:

الحالات الممكنة	عدد ظهور الصورة	الاحتمال
ص ص ص	3	1/8
ص ص ك	2	1/8
ص ك ص	2	1/8
ص ك ك	1	1/8
ك ك ك	0	1/8
ك ك ص	1	1/8
ك ص ك	1	1/8
ك ص ص	2	1/8

دع X تمثل عدد مرات الحصول على وجه صوره عندما القيت قطعه النقد ثلاث مرات، داله الاحتمال

للمتغير X معطاه في الجدول التالي:

X = x	0	1	2	3
f(x) = P(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

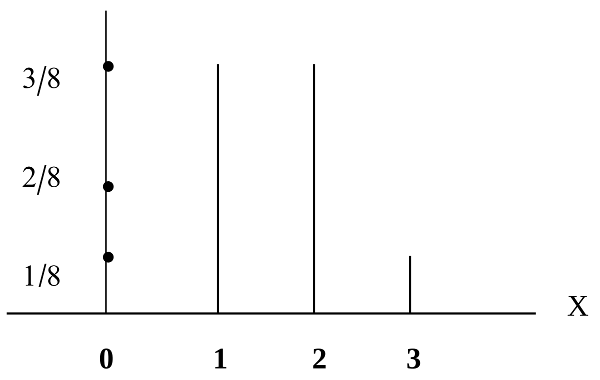
$$E(X) = \sum_{i=0}^{3} X_i \; P(x_i)$$

$$= \ 0\ (\frac{1}{8}) + 1\ (\frac{3}{8}) + 2(\frac{3}{8}) + 3(\frac{1}{8})$$

$$= \ \frac{3}{2}$$

ويمكننا أن نمثل الدالة الاحتمالية المبينة في الجدول السابق بالرسم البياني التالي:

$f(x) \ = P(X = x)$



❖خواص التوقـع Properties of Expected Value

رأينا أن دليل التوقع E عبارة عن رمز يشير إلى عملية رياضية معينه تجري على المتغير الإحصائي التالي لهذا الدليل ويمتاز هذا الدليل بالخواص التالية:

1. إذا كان a ثابت و x متغير عشوائي فإن

$E\ (ax) = \ a\ E\ (X)$

البرهان:

$$E(ax) = \sum_{\text{all } x} ax\,P(x)$$

$$= a \sum_{\text{all } x} X\,P(x)$$

$$= a\,E(X)$$

أو

$$E(ax) = \int_{-\infty}^{\infty} a\,xf(x)\,dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= a\,E(x)$$

2. توقع الثابت يساوي الثابت

إذا كان a ثابت و X متغير عشوائي فإن

$$E(a) = a$$

البرهان :

$$E(a) = \sum_{\text{all } x} aP(x)$$

$$= a \sum P(x)$$

$$= a(1)$$

$$= a$$

نتيجـة :

$$E\,(ax+b) = a\,E\,(x) + b$$

البرهـان :

$$E(ax+b) = E\,(ax) + E(b)$$

$$= a\,E\,(x) + b$$

مثـال 2 :

$$E(2x + 3) = 2\,E(x) + 3$$

3. توقع التوقع يساوي التوقع

$$E\,[E(x)] = E\,(x)$$

البرهـان:

بما أن التوقع قيمة ثابتة كما ذكرنا، وبما أن توقع الثابت يساوي الثابت، أذن توقع التوقع يساوي التوقع.

فلو رمزنا إلى توقع $E(x)$ بالقيمة الثابتة z

فان $E(z) = z$

ومنها $E[E(x)] = E\,(x)$

$$4E\,[(X - E(x)] = 0 \qquad .4$$

البرهـان :

$$E\,[\,(x - E\,(x) = E\,(x) - E(E\,(x)]$$

$$= E\,(x) - E\,(x)$$

$$= 0$$

نظريـة 1 : إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين فان :

$$\boldsymbol{E\,(X \pm Y) = E\,(x) \pm E\,(Y)}$$

أي أن توقع مجموع متغيرين يساوي مجموع توقعات المتغيرين

البرهـان:

$$E\,(X \pm Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int (x \pm y)\, f(x.y)\, d\, xdy$$

$$= \int\int x\, f\,(x, y)\, dxdy \pm \int\int y\, f\,(x, y)\, dxdy$$

$$= \int x\,[\int f(x, y)dy]dx \pm \int y\,[\int f\,(x, y)\, dx]dy$$

$$= \int x\, f(x)\, dx \pm \int y\, f(y)\, dy$$

$$= E(X) \pm E(y)$$

نظريـة 2 :   إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان :

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

البرهـان :

$$E(X\,Y) = \iint X\,Y\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint xy\,f(x)\,f(y)\,dx\,dy \quad \text{.......لاستقلال}$$

$$= \int x\,f(x)\,dx \int y\,f(y)\,dy$$

$$= E(X)\,E(Y)$$

مثـال 3 :

إذا كان X متغيرا عشوائيا دالته الاحتماليه هي:

$$f(x) = 2x$$

وأن $0 \le X \le 1$

فأوجد كل من

$$E(x) \qquad E(x^2) \qquad E(x+1)^2$$

الحـل:

$$E(x) = \int_0^1 x\,f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,(2x)\,dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 \, dx$$

$$= 2\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1$$

$$= 2\left|\frac{1}{3} - 0\right|$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2 f(x) \, dx$$

$$= \int_0^1 x^3 (2x) \, dx$$

$$= \int_0^1 2x^3 \, dx$$

$$= 2\left|\frac{x^4}{4}\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$E(x+1)^2 = E[x^2 + 2 \times + 1]$$

$$= E(x^2) + 2E(x) + 1$$

$$= \tfrac{1}{2} + 2(2/3) + 1$$

$$= \tfrac{1}{2} + 4/3 + 1$$

$$= \frac{17}{6}$$

2.4 التباين والانحراف المعياري Variance & Standard Deviation

نعرف ان التباين والانحراف المعياري هي مقاييس للتشـــتت (Dispersion) لتوزيع تكراري، ولكننا سنناقشهما الآن كمقاييس للتشتت للتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي .

أن القيمة المتوقعه (أو الوســط الحســابي) لتوزيع احتمالي لمتغير عشــوائي ما تدلنا على مركز التوزيع الاحتمالي، وتعطينا معلومات ســريعة عن الوســط في المدى البعيد إذا ما اســتمرينا في إجراء تجربة ما أكثر، ولكنها لا تعطينا أي معلومات عن مدى انتشــار أو تشــتت قيم المتغير العشــوائي من تجربه إلى أخرى. وسنتطرق هنا إلى أكثر المقاييس شيوعاً واستعمالا من مقاييس تشتت التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي وهي: التباين والانحراف المعياري.

ان تباين التوزيع الاحتمالي لمتغير عشــوائي يقاس غالبا بنفس طريقة قياســـه في حالة التوزيع التكراري، والفرق الوحيد هو أننا الآن نجد متوســط مربع انحرافات القيم عن القيمة المتوقعة بدلا من إيجاد متوســط مربع الانحرافات عن الوسط الحسابي للعينة أو التوزيع التكراري.

التبايـن

تباين التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X هو متوسط مربع انحرافات قيم X عن القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي للمتغير X فإذا كان μ E(x) =

وإذا رمزنا الى تباين X بـ σ_x^2 أو Var (x) فان

$$\sigma_x^2 = \mathbf{Var(x)} = \sum_{\text{all x}} (x-\mu)^2\, p(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx$$

حسب كون المتغير متقطعا أو متصلاً

$$= E\,[(x-u)^2]$$

$$= E\,[x - E(x)]^2$$

أي أن التباين هو عبارة عن توقع مربع انحرافات القيم عن توقعه.

نلاحظ أن قيم X الداخلة في حساب التباين هي القيم المربعة لـ X، وهكذا فان التباين لا يقيس التشتت بنفس قيم X وإنما بقيمها المربعة، وكي نحصل على مقياس للتشتت بنفس قيم X فأننا نجد الجذر التربيعي الموجب للتباين وهو ما يدعى بالانحراف المعياري.

الانحراف المعياري

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X هو الجذر التربيعي الموجب لتباين X ويرمز له بالرمز σ_x ويساوي:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{E\,(x-\mu)^2}$$
$$= \sqrt{E\,[X-E(x)]^2}$$

ننصح الطلاب بالعودة إلى طرق حساب التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري قبل المضي قدما في هذا الجزء.

مثال 4 :

بالعودة إلى مثال (1) وهو إلقاء قطعه نقد ثلاث مرات، دع x هي المتغير العشوائي عد مرات ظهور الوجه صورة. الجدول التالي يعطي دالة الاحتمال للمتغير x وكيفية حساب كل من التباين σ_x^2 والانحراف المعياري σ_x.

X = x	f(x) = P(X=x)	Xf(x)	$(x-E(x))^2$	$[x-E(x)]^2 f(x)$
0	1/8	0	$(0-3/2)^2 = 9/4$	9/32
1	3/8	3/8	$(1-3/2)^2 = 1/4$	3/32
2	3/8	6/8	$(2-3/2)^2 = 1/4$	3/32
3	1/8	3/8	$(3-3/2)^2 = 9/4$	9/32
		$E(x)\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$		$\sigma_x^2=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$

وهكذا فأن $\sigma_x^2 = \frac{3}{4}$ التباين

$\sigma_x = \sqrt{\frac{3}{4}}$ الانحراف المعياري

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

نظريـــــــــــــة: إذا كـان X متغيريـا عشـــوائيا توقعــه μ = E (x) وتبـاينــه

فإن Var (x) = σ_X^2

$$\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= E(x^2) - \mu^2$$

البرهـان :

$$\sigma^2 = E[(x - E(x)]^2$$

$$= E[(x^2 - 2xE(x) + \{E(x)\}^2]$$

$$= E(x^2) - 2\{E(x)\}^2 + \{E(x)\}^2$$

$$= E(x2) - [E(x)]^2$$

مثـال 5 :

بالعودة إلى المثال الســـابق وهو رمي قطعه نقد 3 مرات فان الجدول التالي يعطي طريقه حســـاب التباين والانحراف المعياري لـ x باستخدام النظرية السابقة

$$[\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$$

X = x	f(x)	xf(x)	$x^2 f(x)$
0	1/8	0	$(0)^2 (1/8) = 0$
1	3/8	3/8	$(1)^2 (3/8) = 3/8$
2	3/8	6/8	$(2)^2 (3/8) = 12/8$
3	1/8	1/8	$(3)^2 (1/8) = 9/8$
		$E(x) = \frac{3}{2}$	$E(x^2) = \frac{24}{8} = 3$

وهكذا فان التباين يساوي

$$\sigma^2 = E(x2) - [E(x)]^2$$

$$= 3 - (\frac{3}{2})^2$$

$$= \frac{3}{2}$$

والانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي الموجب للتباين = $\sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

❖خـواص التبايـن **Properties of Variance**

هناك عده خواص للتباين، وهذه الخواص تسـهل علينا حسـاب التباين لأي داله في المتغير العشـوائي X

وأهم الخواص هي:

1) إذا كان a ثابت و X متغير عشوائي فإن

$$\text{Var}(ax) = a^2\,\text{Var}(x)$$

البرهـان :

$$\begin{aligned}\text{Var}(ax) &= E\,[ax - E\,(ax)]^2\\ &= E\,[ax - a\,E\,(x)]^2\\ &= a^2E\,[x - E\,(x)]^2\\ &= a^2\text{var}\,(x)\end{aligned}$$

مثـال 6 :

إذا كان تباين x يساوي 0.5 فما هو تباين المتغيرات التالية:

i) $2X$

ii) $\frac{X}{2}$

الحـل:

$$\begin{aligned}\text{i)}\quad \text{Var}(2x) &= 4\,\text{Var}(x)\\ &= 4\,(0.5)\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad Var\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{1}{4} \; Var(x)$$

$$= \frac{1}{4}\,(0.5)$$

$$= 0.125$$

2) تباين الثابت يساوي صفر

إذا كان a ثابت فان

$$Var(a) = 0$$

البرهـان :

$$Var(a) = E\,[a - E\,(a)]^2$$

$$= E\,(a - a)^2$$

$$= E\,(0^2)$$

$$= 0$$

نتيجـة :

$$Var(x \pm a) = Var(x)$$

البرهـان :

$$Var(x \pm a) = Var(x) \pm Var(a)$$

$$= Var(x) \pm 0$$

$$= Var(x)$$

وهكذا فان إضـافة أي قيمة أو طرح أي قيمة ثابته إلى أو من المتغير العشـوائي لا تؤثر على التباين لهذا المتغير.

مثـال 7 : إذا كان تباين المتغير x يساوي 5 فما هو تباين كل من :

i) $x + 3$

ii) $x - 6$

الحـل :

i) $Var(x + 3) = Var(x) = 5$

ii) $Var(x - 6) = Var(x) = 5$

3) إذا كان X ، Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان :

$$Var(x+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

$$Var(x - y) = Var(x) + Var(y)$$

أي أن تباين مجموع متغيرين عشوائين مستقلين أو الفرق بينهما يساوي مجموع تباينيهما.

البرهـان :

$$Var(X \pm Y) = E\,[(X \pm Y) - E\,(X \pm Y)]^2$$

$$= E\,[\{X - E(x)\} \pm \{Y - E(y)\}]^2$$

$$= E\,[\{X - E(x)\}^2 + \{Y - E(y)\}^2 \pm 2\{X - E(x)\}\{Y - E(y)\}]$$

$$= E\ \{X - E(x)\}^2 + E\{Y - E(y)\}^2 \pm 2E[\{X - E(x)\}\{Y - E(y)\}]$$

$$= Var\ (x) + Var(Y) \pm 2E[\{X - E(x)\}\{Y - E(Y)\}]$$

وهكذا فعلينا أن نثبت بأن الحد الأخير يساوي صفر، بما أن الحادثين مستقلين يكون الحد الخير مساوياً

$$= 2\ [E\ \{x - E(x)\}\ E\{Y - E(y)\}]$$

$$= 2\ [(0)\ (0)]$$

$$= 0$$

$$\therefore\ Var\ (X \pm Y) = Var\ (x) + Var\ (Y)$$

ويمكن تعميم هذه القاعده على أي عدد غير محدود من المتغيرات المستقله أي أن :

$$Var\ (x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots \pm x_n) = Var\ (x_1) + Var(x_2) + \ldots + Var\ (x_n)$$

3.4 التغايــر Covariance

وهو مقياس للارتباط بين متغيرين Y, X، فاذا كانت f(xy) داله كثافة احتمال هذين المتغيرن معا فان تغاير المتغيرين Y, X يعرف رياضياً كما يلي :

$$Cov\ (X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int [X - E\ (x)]\ [Y - E(y)]\ f\ (xy)\ dxdy$$

$$= E\ [\{X - E(x)\}\{Y - E(y)\}]$$

التغايـر

وهكذا فان التغاير للمتغيرين Y, X (والذي يرمز له بالرمز C أو Cov) هو عباره عن توقع حاصل ضرب انحرافي المتغيرين عن مركزيهما أي يساوي :

$$\mathbf{Cov\ (x, Y) = E\ [(x-\mu_x)\ (Y-\mu_y)]}$$

❖خـواص التغايــر Properties of Covariance

1- تغاير X, X هو تباين X أي

$$\text{Cov}\ (x, x) = \text{Var}\ (x)$$

البرهـان:

بوضـع X بدل Y في معادله التغاير أعلاه نصل إلى المطلوب

2- إذا كان b , a ثابتين فان :

$$\text{Cov}\ (ax, by) = ab\ \text{Cov}\ (x,y)$$

البرهـان:

$$\text{Cov}\ (ax,\ by) = E\left[\{ax - E(ax)\}\{by - E(by)\}\right]$$

$$= ab\ E\ \{x - E(x)\}\{Y - E(y)\}$$

$$= ab\ \text{cov}\ (x,\ y)$$

3- اذا كان a ثابت فان

$$\text{Cov}(x, a) = 0$$

البرهـان :

$$\text{Cov}(x, a) = E\left[\{x - E(x)\}\{a - E(a)\}\right]$$

$$= E\left[\{x - E(x)\}\{0\}\right]$$

$$= 0$$

-4 $\mathbf{Cov(x_1 + x_2\ ,\ y) = Cov(x_1, y) + Cov(x_2, y)}$

البرهـان:

$$\text{Cov}(x_1 + x_2\ ,\ y) = E\left[\{(x_1 + x_2) - E(x_1 + x_2)\}\{Y - E(y)\}\right]$$

$$= E\left[\{x_1 - E(x_1)\}\{y - E(y)\}\right] + E\left[\{x_2 - E(x_2)\}\{y - E(y)\}\right]$$

$$= \text{Cov}(x_1\ ,\ y) + \text{Cov}(x_2\ ,\ y)$$

5- في حاله أي متغيرين x_1 , x_2 فان

$$\text{Var}(x_1 + x_2) = \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + 2\text{Cov}(x_1\ ,\ x_2)$$

$$\text{Var}(x_1 - x_2) = \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) - 2\text{Cov}(x_1\ ,\ x_2)$$

البرهـان:

$$Var(x_1 + x_2) = E[(x_1 + x_2) - E(x_1 + x_2)]^2$$

$$= E[\{x_1 - E(x_1)\} + \{x_2 - E(x_2)\}]^2$$

$$= E[x_1 - E(x_1)]^2 + E[x_2 - E(x_2)]^2 +$$

$$2E[\{x_1 - E(x_1)\}\{x_2 - E(x_2)\}]$$

$$= Var(x_1) + Var(x_2) + 2\,Cov(x_1, x_2)$$

وبالمثل في حاله تباين الفرق بين متغيرين أي في حاله

$$Var(x_1 - x_2)$$

6- أذا كان x_1 , x_2 متغيرين مستقلين فان

$$Cov(x_1, x_2) = 0$$

البرهـان :

$$Cov(x_1, x_2) = E[\{x_1 - E(x_1)\}\{x_2 - E(x_2)\}]$$

$$= E[x_1 x_2 + E(x_1)E(x_2) - x_1 E(x_2) - x_2 E(x_1)$$

$$= E(x_1)E(x_2) + E(x_1)E(x_2) - E(x_1)E(x_2) - E(x_1)E(x_2)$$

$$= 0$$

وبما أن المتغيرين مستقلين يكون

$$E(x_1 x_2) = E(x_1)E(x_2)$$

4.4 معامـل الارتبـاط Correlation coefficient

يعرف المقدار

$$\frac{Cov\,(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(x)\,\mathrm{Var}\,(y)}} = \rho$$

بمعامل الارتباط بين المتغيرين الإحصائيين Y , X

ويكون هذا المعامل صفرا إذا كان التغاير بين Y , X يساوي صفر.

ومعامل الارتباط يقع في المدى

$$1 \geq \rho \geq -1$$

وهكذا فإن

$$\rho^2 \leq 1$$

5.4 تمارين الفصل الرابع / التوقـــع، التبايـن، والتغايـر

1) إذا كان $E(x) = \mu$ فأثبت أن :

i) $E(x-\mu) = 0$

ii) $E(x-c)^2 = E(x-\mu)^2 + (\mu - c)^2$

حيث C أي ثابت

2) إذا كانت احتمالات أن يوجد شخص واحد أو شخصان أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 أشخاص في الدرجة الأولى للطائرة هي على الترتيب :

0.04 ، 0.09 ، 0.12 ، 0.27 ، 0.43 ، 0.05

فما هو عدد الأشخاص المتوقع وجودهم في الدرجه الأولى للطائرة ؟

3) أثبت أن المقدار $E(x-a)^2$ يكون في نهايته الصغرى عندما يكون الثابت a يساوي $E(x)$.

4) إذا كان لدينا المتغيرين المستقلين X , Y كثافة احتمالهما هي:

$$f(x) = 12x^2(1-x) \qquad 0 \le X \le 1$$

$$f(y) = 2Y \qquad 0 \le Y \le 1$$

أوجد توقع المقدار

$$\frac{Y}{x^2} + \frac{x}{Y}$$

5) إذا كان X متغير عشوائي وسطه الحسابي 10 وتباينه 6 أوجد قيمة

$$E\,(x^2 + 3\,x)$$

6) الجدول التالي يعطي التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات المباعة من قبل أحد بائعي السيارات خلال شهر:

عدد السيارات	الاحتمال
0	0.01
10	0.05
20	0.39
30	0.45
40	0.10
المجموع	**1.00**

أوجد:

i) متوسط عدد السيارات المباعه خلال الشهر

ii) تباين عدد السيارات المباعه خلال الشهر

7- الجدول التالي يبين عدد التلفزيونات الملونه المباعه عادة في احد المحلات أسبوعياً والاحتمال المناظر لكل منها:

عدد التلفزيونات	الاحتمـال
0	0.13
4	0.27
6	0.39
8	0.21
40	0.07
المجمــوع	**1.00**

أوجد :

I. متوسط المبيعات الأسبوعية

II. تباين الوسط الحسابي للمبيعات الأسبوعية

8) أشترى شخص بطاقة يانصيب، يستطيع أن يربح الجائزة الأولى وهي 4000 دينار أو الجائزة الثانية وهي 3000 دينار باحتمال 0.005 ، 0.008 على الترتيب، فما هو السعر المناسب لهذه البطاقة؟

9) ذهب شـخص لشـراء سـياره، فاذا كان سـيختار السـيارة A أو B أو C باحتمال 0.4 و 0.3 و 0.3 على الترتيب وكان ثمن السيارة A 2000 دينار والسيارة B 2500 دينار والسيارة C 3000 دينار فما هو المبلغ المتوقع أن يدفعه هذا الشخص؟

10) شـركة تعمل في ثلاثة مشـاريع مسـتقلة هي C , B, A والعائدات المتوقعه للمشـاريع الثلاثة هي 100.000 ، 50.000 ، 25.000 على الترتيب، والتباينات هي 10.000 ، 5000 ، 3.000 دينار على الترتيب فما هو:

i) اجمالي العائدات المتوقعة من المشاريع الثلاثة

ii) اجمالي التباين

11) إذا كانت X هي عدد الأخطاء المطبعية في صفحة وأن

$$f(0) = 0.90$$

$$f(1) = 0.05$$

$$f(2) = 0.03$$

$$f(3) = 0.02$$

فما هو عدد الأخطاء المتوقع في 200 صفحة ؟

12) إذا كان C ثابت و X متغير عشوائي داله احتماله

$$f(x) = cx$$

$$x = 3, 4, 5, 6$$

أوجد :

i) قيمة الثابت C

ii) توقع X

iii) تباين X

13) أثبت أن

$$Cov\ (x, y) = E\ (x\ y) - \mu_x\ \mu_y$$

14) إذا علمت أن داله كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين y,x هي

$$f(x, y) = x + y \qquad 0 \le X \le 1$$

$$0 \le y \le 1$$

أوجد

i) تغاير y, x أي $Cov\ (x, y)$

ii) معامل الارتباط y , x أي $\rho\ (x,y)$

6.4 حل تمارين الفصل الرابع / التوقـــع، التبايـن، والتغايـر

(1

i) $E(x-\mu) = E[(x-E(x)] = E(x) - E(x)$

$= 0$

ii) $E(x-C)^2 = E(x^2-2cx + C^2)$ — الطرف الأيسر

$= E(x^2) - 2CE(x) + C^2$

$= E(x^2) - 2C\mu + C^2$

— الطرف الأيمن

$E(x-\mu)^2 + (\mu-c)^2 = E(x^2 - 2\mu x + \mu^2) + \mu^2 - 2\mu C + C^2$

$= E(x)^2 - 2\mu^2 + \mu^2 + \mu^2 - 2\mu C + C^2$

$= E(x^2) - 2\mu c + C^2$

$\therefore$ يكون الطرفان متساويين وهو المطلوب

(2

X = x	f(x)	x f(x)
1	0.05	0.05
2	0.43	0.86
3	0.27	0.81
4	0.12	0.48
5	0.09	0.45
6	0.04	0.25

$$E(X) = \sum_{allx} XP(x)$$

$$= 2.89$$

وهو المطلوب

3) يكون المقدار في نهايته الصغرى إذا كانت المشتقه الأولى له تساوي الصفر

$$E(x-a)^2 = \underbrace{E(x^2) - 2\,a\,E\,(x) + a^2}_{Z}$$

نشتق هذا المقدار (Z) بالنسبة لـ a

$$\frac{dz}{da} = 0 - 2\,E\,(x) + 2a$$

$$= 0 - 2\,a + 2a$$

$$= 0$$

حيث $a = E(x)$

$\therefore$ المقدار في نهايته الصغرى

(4

$$E\left(\frac{Y}{X^2}+\frac{X}{Y}\right)=E\left(\frac{Y}{X^2}\right)+E\left(\frac{X}{Y}\right)$$

$$= E(Y)\,E\left(\frac{1}{X^2}\right)+E(X)E\left(\frac{1}{Y}\right)$$

لأنهما مستقلان

الآن نجد كل توقع على حده ونعوض الناتج في المعادله أعلاه

$$E(Y) = \int_0^1 Y\, f(Y)\, dy$$

$$= \int_0^1 Y\ (2Y)\, dy$$

$$= 2\int_0^1 Y^2\, dY$$

$$= 2\left|\frac{Y^3}{3}\right|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{X^2}\left\{12\ X^2(1-X)\right\} dX$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{X^2}\left\{12\ X^2 - 12X^3)\right\} dx$$

$$= 12\int_0^1 (1-X)\ dX$$

$$= 12\left| X - \frac{X^2}{2}\right|_0^1$$

$$= 12\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 6$$

$$E(X) = \int_0^1 X\left\{12\ X^2(1-X)\right\} dX$$

$$= 12\int_0^1 X^3 - X^4\ dx$$

$$= 12\left| \frac{X^4}{4} - \frac{X^5}{5}\right|_0^1$$

$$= 12\left(\tfrac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_0^1 \frac{1}{Y}(2Y)\ dy$$

$$= \int_0^1 2\, dy$$

$$= 2$$

$$E\left(\frac{Y}{X^2} + \frac{X}{Y}\right) = E(Y)\ E\left(\frac{1}{X2}\right) + E(X)\ E\left(\frac{1}{Y}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)(6) + \left(\frac{3}{5}\right)(2)$$

$$= 5.2$$

(5

$$E(X^2 + 3X) = E(X^2) + 3E(X) \qquad \text{.........} \ 1$$

$$Var(x) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \qquad \text{.........} \ 2$$

$$6 = E(X^2) - (10)^2$$

$$E(X^2) = 106 \qquad \text{.........} \ 3$$

نعوض 3 في 1

$$E(X^2 + 3X) = 106 + 3(10)$$

$$= 106 + 30$$

$$= 136$$

(6

عدد السيارات X – x	f(x)=P(X=x)	X f(x)	X^2 f(x)
0	0.01	0	0
10	0.05	0.50	5
20	0.039	7.80	156
30	0.45	13.50	405
40	0.10	4.00	160

$$E(x) = \sum_{allx} Xp(x)$$

$$= 25.8$$

$$E(x^2) = \sum_{allx} x^2 P(x)$$

$$= 726$$

$$V(x) = E(x2) - \{E(x)\}^2$$

$$= 726 - 665.64$$

$$= 60.36$$

(7

X	P(X)	XP (X)	X^2 P(x)
2	0.13	0.26	0.52
4	0.27	1.08	4.32
6	0.32	1.92	11.52
8	0.21	1.68	13.44
10	0.07	0.70	7.00

$$E(x) = \sum XP(x)$$

$$= 5.64$$

$$E(x^2) = \sum x^2 p(x)$$

$$= 36.80$$

$$V(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$

$$= 36.80 - 31.8096$$

$$= 4.9904$$

$$\cong 5$$

8) السعر المناسب يساوي قيمة التوقع

$$E(x) = \sum_{allx} X\ P\ (X)$$

$$= 4000\ (0.005) + 3000\ (0.008)$$

$$= 20 + 24$$

$$= 44$$

9) المبلغ المتوقع أن يدفعه هو توقع الأسعار الثلاثة

$$E(x) = \sum_{allx} XP(x)$$

$$= 2000\ (0.4) + 2500(0.3) + 3000(0.3)$$

$$= 800 + 750 + 900$$

$$= 2450$$

10) بما أن المشاريع مستقلة يكون إجمالي العائدات المتوقعة هو

i) $$E\ (X_1 + X_2 + X_3) = E\ (X_1) + E(X_2) + (X_3)$$

$$= 100000 + 50000 + 25000$$

$$= 175000$$

ii) $$V\ (X_1 + X_2 + X_3) = V\ (X_1) + V(X_2) + V\ (X_3)$$

$$= 10000 + 5000 + 3000$$

$$= 18000$$

11) عدد الأخطاء المتوقعة في الصفحة الواحدة =

$$E(x) = \sum_{allx} X\ P(X)$$

$$= 0(0.9) + 1(0.05) + 2(0.03) + 3(0.02)$$

$$= 0 + 0.05 + 0.06 + 0.06$$

$$= 0.17$$

عدد الأخطاء المتوقعة في 200 صفحة هو مجموع توقعات الـ 200 صفحة لأنها حوادث مستقلة

$$= 200(0.17) = 34$$

12)

i) $$\sum_{allx} f(x) = 1$$

$$\therefore \sum C X = 1$$

$$C \sum X = 1$$

$$C(3 + 4 + 5 + 6) = 1$$

$$\therefore C = \frac{1}{18}$$

ii) $$E(x) = \sum_{allx} X\,P(X)$$

$$= \sum X\ CX$$

$$= C \sum x^2$$

$$= \frac{1}{18}\ (9 + 16 + 25 + 36)$$

$$= \frac{43}{9}$$

iii) $V(X) = E(X^2) - \{E(x)\}^2$

$$= E(X^2) = \sum_{\text{all}x} X^2\, P(X)$$

$$= C\sum X^3$$

$$= \frac{1}{18}\ (27 + 64 + 125 + 216)$$

$$= \frac{216}{9}$$

$$\text{Var}(x) = \frac{216}{9} - \left(\frac{43}{9}\right)^2$$

$$= \frac{1944 - 1849}{81}$$

$$= \frac{95}{81}$$

13) أثبت أن

$$\text{Cov}(x, Y) = E(XY) - \mu_x\, \mu_y$$

البرهـان:

$$\text{Cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]$$

$$= E(xy - x\mu_y - \mu_x y + \mu_x\ \mu_y)$$

$$= E(xy) - \mu_x \mu_y - \mu_x \mu_y + \mu_x \mu_y$$

$$= E(XY) - \mu_x \mu_y$$

وهو المطلوب

(14

i) تغاير x ,y أي Cov (x, y)

$$Cov(x, y) = E(xy) - E(x)\,E(y)$$

∴ حتى نجد التغاير لابد أن نجد أولاً توقع X وتوقع Y وتوقع XY

حتى نحصل على E(x) , E (y) نبحث عن E(x+y)

$$E(x + y) = \int_0^1\!\!\int (x+y)\ f(x,y)\ dx\ dy$$

$$= \int_0^1\!\!\int x f\ (x,y)\ dx\ dy + \int_0^1\!\!\int x f\ (xy)\ dx\ dy$$

$$= \underbrace{\int_0^1 [x \int_0^1 f(xy)\,dy]\ dx}_{E(x)} + \underbrace{\int_0^1 y [\int_0^1 f(xy)\,dx]\ dy}_{E(y)}$$

$$= \int_0^1 [x \int_0^1 (x+y)\,dy]\ dy + \int_0^1 y [\int_0^1 (x+y)\,dx]\ dy$$

$$= \int_0^1 x \left| xy + \frac{y^2}{2} \right|_0^1 dy + \int_0^1 y \left| \frac{x^2}{2} + yx \right|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 x\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{f(x)}dx \quad + \int_0^1 y\underbrace{\left(y+\frac{1}{2}\right)}_{f(x)}dy$$

$$= \int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{2}\right)dx + \int_0^1 \left(y^2+\frac{y}{2}\right)dy$$

$$= \left|\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right|_0^1 + \left|\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{4}\right|_0^1$$

$$= \frac{7}{12}+\frac{7}{12}$$

أي أن

$$E(x) = \frac{7}{12}$$

$$E(Y) = \frac{7}{12}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$f(y) = y + \frac{1}{2}$$

الآن نحسب E(xy)

$$E(xy) = \int_0^1\int xy\ f(xy)\ dxdy$$

$$= \int_0^1\int xy\ (x+y)\ dxdy$$

$$= \int_0^1\int x^2y + xy^2\ dxdy$$

$$= \int_0^1 [\int_0^1 x^2 y\, dx]\, dy + \int_0^1 [\int_0^1 xy^2\, dx]\, dy$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{x^3 y}{3} \right|_0^1 dy + \int_0^1 \left| \frac{xy^3}{3} \right|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} y dy + \int_0^1 \frac{1}{3} x dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 y dy + \frac{1}{3} \int_0^1 x dx = \frac{1}{3} \left| \frac{Y^2}{2} \right|_0^1 + \frac{1}{3} \left| \frac{X^2}{2} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

فيكـون

$$Cov\ (x, y) = E(xy) - E(x)\ E(y)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{49}{144}$$

$$= \frac{1}{144}$$

ii) لحساب معامل الارتباط لابد من حساب v(x) , V (y)

$$V(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \left| \frac{X^4}{4} + \frac{X^3}{6} \right|_0^1$$

$$= \frac{5}{12}$$

$$Var(x) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$V(y) = \frac{11}{144}$$

$$\rho(x,y) = \frac{\text{Cov }(x,y)}{\sqrt{V(x)\,V(y)}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}\cdot\frac{11}{144}}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{144}}{\frac{11}{144}}$$

$$= -\frac{1}{11}$$

الفصل الخامس

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

THE DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

مقدمـــة

هنـــــــاك عـدة توزيعـات احتمـاليـــــــة متقطعـة، منهـا: توزيـع برنولـي، توزيـع ثنائي الحديـن، توزيع ثنائي الحدين السالب، توزيـع كثير الحدود، توزيـع الهيبروجيومتريك وتوزيع بواسون، ولكننا ســندرس في هذا الفصـــل فقط توزيع ثنائي الحدين وتوزيع بواســون نظرا لما لهذين التوزيعين من تطبيقات واسعة في التجارة والاقتصاد.

1.5 توزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution

في كثير من التطبيقات الاقتصـــادية والتجارية كثيرا ما نكون معنيين بدراســـة الاختبارات التي يكون لها نتيجتين ممكنتين فقط، وهما ما تدعيان عادة بالنجاح أو الفشـــل، مثل هذه الاختبارات تعرف بالاختبارات ثنائية الحدين، مثل اختبار ما إذا كان أحد المصـابيح الكهربائية التي ينتجها مصـنع ما سليما أو معيبا. ويقال للتجربة التي تتكون من عدة اختبارات ثنائية الحدين **بالتجربة ثنائية الحدين**، مثل ســـؤال 100 طالب ما إذا كانوا يدخنون أم لا، ويجب أن يتحقق في أي تجربة ثنائية الحدين الشروط الأربعة التالية:

1. عدد الاختبارات محدود
2. لكل اختبار فقط نتيجتين ممكنتين وهما النجاح أو الفشل

3. احتمال النجاح يكون ثابت في كل الاختبارات ولا يختلف من اختبار لآخر

4. الاختبارات مستقلة بعضها عن بعض

من خلال المثال التالي سوف نوضح ونشتق التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي ثنائي الحدين في تجربة ثنائية الحدين، وهو ما يعرف باسم التوزيع ثنائي الحدين.

مثـال 1:

لو كانت n هي عدد الاختبارات في التجربة ثنائية الحدين وهي إلقاء قطعة عمله معدنية، وكانت P هي احتمال الحصـول على الوجه صـوره (أي النجاح) و (1−P) ويرمز لها بالرمز q هي احتمال عدم ظهور الوجه صوره (أي الفشل) أي هي احتمال ظهور الوجه كتابه في كل اختبار:

أولاً: لو جعلنا $n = 1$

فإن مجموعة الحالات الممكنة تكون

$S =$ (ص و ك)

حيث ص ترمز إلى الوجه صوره

ك ترمز إلى الوجه كتابه

دع X تمثل المتغير العشوائي عدد مرات ظهور الوجه صوره

فتكون القيم الممكنة لـ X هي 0 ، 1

P هي احتمال ظهور الصوره

$q = (I-P)$ هي احتمال ظهور الكتابة

فيكون التوزيع الاحتمالي للمتغير x على الشكل التالي:

جدول 1

التوزيع ثنائي الحدين

$n = 1$

$X = x$	**$f(x) = P(X = x)$**
0	$f(0) = P($ك$) = q$
1	$f(1) = P($ص$) = P$
المجموع	**$q + P = 1$**

ثانياً: لو جعلنا $n = 2$

فان مجموع الحالات المكنة تكون

$S =$ (ص ص ، ص ك ، ك ص ، ك ك)

حيث ص ص تعني الأولى صورة والثانية صورة

ك ك تعني الأولى كتابة والثانية كتابة

ص ك تعني الأولى صورة والثانية كتابة

ك ص تعني الأولى كتابة والثانية صورة

أي أن عدد الحالات الممكنة 4 حالات

وتكون احتمالات هذه الحالات هي

$qq\ ,\ qp,\ pq,\ pp$

حيث أن الاختبارات مستقلة

وتكون قيم x الممكنة هي 0 ، 1 ، 2

ويكون التوزيع الاحتمالي لـ x كما في الجدول التالي:

جـدول (2)

توزيع ثنائي الحدين

$\mathbf{n = 2}$

$X = x$	$f(x) = P\ (X = x)$
0	$f\ (0) = P$ (ك ك) $= P$ (ك) P (ك) $= qq = q^2$
1	$f\ (1) = P$ (ص ك) $+ P$ (ك ص) $= P$ (ص) P (ك) $+ P$ (ك) P (ص) $= Pq + qP = 2qP$
2	$f\ (2) = P$ (ص ص) $+ P$ (ص) P (ص) $= PP = P^2$
المجموع	$\mathbf{q^2 + 2qP + P^2 = (q+P)^2 = 1}$

ثالثاً: لو جعلنا n تساوي 3

فإن مجموعة الحالات الممكنة تكون

S = { ص ص ص، ك ص ص، ص ك ص، ك ك ص، ص ص ك، ك ص ك، ص ك ك ، ك ك ك }

أي أن مجموع الحالات الممكنة = 8 حالات

وتكون الاحتمالات المناظرة لهذه الحالات هي:

qqq, qqP, qPq, qPP, Pqq, PqP, PPq, PPP

وتكون قيم x الممكنة هي 0 ، 1 ، 2 ، 3

ويكون التوزيع الاحتمالي لـ x كما في الجدول التالي:

جـدول 3 توزيع ثنائي الحدين

n = 3

X = x	**f(x) = P (X = x)**
0	f (0) = P (ك ك ك) = P (ك) P (ك) P (ك) = q^3
1	f (1) = P (ص ك ك) + P (ك ص ك) + P (ك ص ص)
	$= q^2 p + q^2 p + q^2 p = 3 q^2 p$
2	f (2) = P (ص ص ك) + P (ص ك ص) + P (ك ص ص)
	$= qp^2 + qp^2 + qp^2 = 3qp^2$
3	f (3) = P (ص ص ص) = P (ص) P (ص) P (ص) = p^3
المجموع	$\mathbf{q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + P^3 = (q+p)^3 = 1}$

نلاحظ من الجداول الثلاثة السابقة أن عدد الحالات الممكنة هو :

إذا كانت n تساوي 1 فان الحالات الممكنة = 2^1 = 2

إذا كانت n تساوي 2 فان الحالات الممكنة =2^2 = 4

إذا كانت n تساوي 3 فان الحالات الممكنة = 2^3 = 8

وبتعميم هذه النتيجة يكون عدد الحالات الممكنة بتجربة ثنائية الحدين يساوي 2^n إذا كانت التجربة مكونه من n اختبار. إذا ما اســتمرينا في زيادة عدد الاختبارات n، فاننا بصــورة عامة نســتطيع أن نطبق نفس الطريقة كما في الجداول الثلاثة السابقة، ولكن العمليات الحسابية ستكون طويلة ومملة ولا بد من طريقة عامة تسهل لنا ذلك.

والآن نســتطيع القول بأن احتمال الحصــول على الوجه صــورة x مرة بالضــبط في تجربة ثنائية الحدين تتكون من n اختبار (القاء قطعة عمله) عندما يكون ترتيب الصــورة والكتابة معينة أو مبينة، هو احتمال وقوع الحادث (ظهور الوجه صورة) x مرة وعدم وقوعة (n−x) مرة وذلك في حالات مختلفة.

احتمال وقوع الحادث (صورة) x مرة هو P^x

احتمال عدم وقوع الحادث n−x مرة هو q^{n-x}

ومن قاعدة ضرب الاحتمالات يكون احتمال وقوع الحادث x مرة هو $p^x q^{n-x}$

وعدد الحالات المواتية لوقوع الحادث يمكننا حسابه بالتوافيق وهو يساوي توافيق x من n أي

$$C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

وهكذا يكون الاحتمال المطلوب وهو الحصول على الوجه صوره x مرة بالضبط من n اختبار مساوياً إلى

$$\binom{n}{x}\ p^x q^{n-x}$$

مثلاً ، لو كانت n تساوي 3 تكون احتمالات ظهور الوجه صوره 0 ، 1 ، 2 ، 3 مرات هي على التوالي

$$(3^3)\ p^3\ ,\ (2^3)\ p^2 q\ ,\ (1^3)\ pq^2\ ,\ (0^3)\ q3$$

$$p^3\ ,\ 3p^2q\ ,\ 3pq^2\ ,\ q^3$$

وهي نفس الاحتمالات التي حصلنا عليها في جدول (3)

ويلاحظ أن القيم الناتجة عن القانون

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$x = 0, 1, \ldots\ldots, n$$

هي نفسها قيم الحد x في مفكوك ثنائي الحدين

$$(q+p)^n$$

حيث

$$(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1}pq^{n-1} + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{x}p^xq^{n-x} + \ldots + \binom{n}{n-1}p^{n-1}q + p^n$$

ومن هنا جاءت تسمية هذا التوزيع الاحتمالي بالتوزيع ثنائي الحدين

وباختصار فان توزيع ثنائي الحدين هو:

التوزيع ثنائي الحدين:

هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـــوائي المتقطع x والذي يمثل عدد مرات النجاح في n اختبار ثنائي الحدين، ويعطي هذا التوزيع بالصيغة

$$\mathbf{f(x)} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث :

i) $x = 0, 1, \ldots, n$

ii) p هي احتمال النجاح في كل اختبار

iii) q هي احتمال الفشل في كل اختبار

iv) $p + q = 1$

مثال 2 :

طلب من أحد منتجي الكراسي (المقاعد) المدرسية أن يضع في كل غرفة دراسة بعض المقاعد الخاصة بالأعسرين (الايسرين)، إذا كان يعلم أن 10% من السكان أعسرين ما هو احتمال ان غرفة لعشرين طالبا:

i) لا تحتوي على أي عسر

ii) اثنان منهم اعسران

iii) أكثر من أثنين منهم أعسرين

الحل: دع x تمثل عدد الاعسرين الموجودين في هذه الغرفة

تكون القيم الممكنة لـ x هي 0 ، 1 ، 2 ، ... ، 20

دع p تساوي احتمال أن يكون الفرد اعسرا

q تساوي احتمال أن لا يكون الفرد اعسرا

$$\therefore \quad p = 0.10$$

$$q = 1-P \quad = 0.90$$

$$n = 20$$

i) p (لا تحتوي على اعسر) $= f(0)$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$f(0) = \binom{20}{0} p^0 q^{20}$$

$$= (q)^{20} = (0.90)^{20}$$

$$= 0.122$$

ii) P (اثنان اعسران) $= f(2)$

$$f(2) = \binom{20}{2} p^2 \; q^{18}$$

$$= 190\ (0.01)^2\ (0.90)^{18}$$

$$= 190\ (0.01)\ (0.9)^{18}$$

$$= 0.285$$

iii) P (اكثر من اثنين) $= p(x > 2) = 1 - p(x \le 2)$

$$= 1 - \{p(x=0) + p(x=1) + p(x=2)\}$$

$$= 1 - \{(0.9)^{20} + 20\,(0.1)\,(0.9)^{19} + 0.285\}$$

$$= 1 - \{0.122 + 0.270 + 0.285\}$$

$$= 0.323$$

❖ توقع التوزيع ثنائي الحدين **Binomial Distribution Expectation**

بالعودة إلى المثال السابق وهو تجربة إلقاء قطعة عملة n مرة، وبجعل n تساوي 1 فان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في الجدول (1) والتوقع لهذا التوزيع محسوب في جدول (4) التالي:

جـدول (4)

توقع توزيع ثنائي الحدين

$n = 1$

X	**f (x)**	**x f (x)**
0	q	0
1	p	p
المجمـوع		$\mu = \sum_{0}^{1} xf(x) = p$

وبجعل n تساوي 2 فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صوره معطى في الجدول (2)، والتوقع (أو الوسط الحسابي) لهذا التوزيع محسوب في جدول (5) التالي:

جـدول (5)

توقع توزيع ثنائي الحدين

$n = 2$

X	**f(x)**	**x f (x)**
0	q^2	0
1	2pq	2qp
2	p^2	$2p^2$
المجمـوع		**$E(x) = 2p\ (q+p) = 2p$**

وبجعل n تساوي 3 فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x هو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في الجدول (3)، والتوقع (أو الوسط الحسابي) لهذا التوزيع يمكن حسابه كما في جدول (6) التالي:

جـدول (6)

توقع توزيع ثنائي الحدين

$n = 3$

X	**f(x)**	**X f (x)**
0	q^3	0
1	$3p^2q$	$3q^2 p$
2	$3qp^2$	$6q p^2$
3	P^3	$3p^3$
المجمـوع		$\mu = E(x) = 3p(q^2 + 2qp + p^2)$ $= 3p (q + p)^2 = 3p$

وهكذا فاننا نلاحظ بأن الوسط الحسابي (أو التوقع) للتوزيع ثنائي الحدين هو :

P إذا كانت n تساوي 1

2p إذا كانت n تساوي 2

3p إذا كانت n تساوي 3

ويمكننا الآن أن نعمم هذه النتيجة فنقول بأن توقع التوزيع ثنائي الحدين يساوي n p لـ n من الاختبارات.

توقع التوزيع ثنائي الحدين

إذا كان p هو احتمال النجاح و q هو احتمال الفشل في كل اختبار فإن عدد مرات النجاح المتوقعة من n اختبار هو

$\mu = np$

ويمكننا أن نبرهن ذلك أيضاً باستخدام تعريف التوقع كما يلي:

$$\begin{aligned}
\mu = E(x) &= \sum_{x=0}^{n} x\, f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \frac{x\, n!}{x!(n-x)!} p^{x} q^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!\,[(n-1)-(x-1)]!}\, p^{x}\, q^{(n-1)-(x-1)} \\
&= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!\; p^{x-1}\, q^{(n-1)-(x-1)}}{(x-1)!\,[(n-1)-(x-1)]!} \\
&= np \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} P^{x-1}\, q^{(n-1)-(x-1)} \\
&= np\,(q+p)^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}$$

مثال 3 : إذا ألقيت قطعة نقدية 100 مرة فما هو عدد المرات المتوقعة لظهور الوجه صورة؟

الحل:

دع x تمثل المتغير العشوائي وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة، وهكذا فإن x لها توزيع ثنائي الحدين بـ

$$P = \frac{1}{2}$$

$$n = 100$$

وتوقع التوزيع ثنائي الحدين = np

$$\mu = E(x) = np = 100\left(\frac{1}{2}\right) = 50$$

وهو المطلوب

❖ تباين التوزيع ثنائي الحدين Binomial Distribution Variance

بالعودة إلى مثال (1) وهو تجربة إلقاء قطعة نقد n مرة، وباستخدام قانون التباين

$$\sigma_x^2 = \sum (x - \mu)^2 \, f(x)$$

وبجعل n تأخذ القيم 1، 2، 3 نستطيع أن نصل إلى صيغة عامة لتباين التوزيع ثنائي الحدين.

بجعل n تساوي 1 يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في الجدول (1) وتوقع هذا التوزيع كما حسب في الجدول (4) وهو p وأما تباين هذا التوزيع فيمكن حسابه كما في جدول (7) التالي:

جدول (7)

تباين التوزيع ثنائي الحدين

$n = 1$

X	**f(x)**	**$x - \mu$**	**$(x-\mu)^2 f(x)$**
0	q	$0-p$	$q^2 q$
1	p	$1-p$	$(1-p)^2 p$
المجموع			$\sigma_x^2 = \mathbf{p^2q + q^2p}$ $= \mathbf{pq\ (p+q) = pq}$

وبجعل n تســـاوي 2 فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـــوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صـــورة معطى في جدول (2) ، وتوقع هذا التوزيع هو 2p كما حســـــب في جدول (5) وأما تباين هذا التوزيع فيمكن الوصول إليه كما في جدول (8) التالي:

جـدول (8)

تباين التوزيع ثنائي الحدين

$n = 2$

X	f(x)	x − u	$(x-u)^2\ f(x)$
0	q^2	$-2p$	$4p^2\ q^2$
1	$2pq$	$1-2p$	$(1-2p)^2\ 2pq$
2	p^2	$2-2p$	$4(1-p)^2\ p^2$
المجموع			$\sigma_x^2 = 4p^2q^2+(1-2p)^2\ 2pq+4(1-p)^2\ p^2$ $= 4p^2q^2+(1-4p+4p^2)\ 2pq + 4q^2\ p^2$ $= 8p^2q^2+ 2pq - 8p^2q + 8p^2\ q$ $= 8p^2\ q\ (q-1 + p) + 2p\ q$ $= 8p^2\ q\ (0) + 2p\ q$ $= 2pq$

وبجعل n تساوي 3 فان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في جدول (3)، وتوقع هذا التوزيع كما حسـب في جدول (6) هو 3p ويمكننا بنفس الطريقة السـابقة أن نصل إلى تباين هذا التوزيع يساوي 3pq عندما n تساوي 3

وهكذا يكون تباين التوزيع ثنائي الحدين يساوي:

pq عندما n تساوي 1

2pq عندما n تساوي 2

3Pq عندما n تساوي 3

ويمكننا تعميم هذه النتيجة بالقول بان تباين التوزيع ثنائي الحدين يساوي npq لـ n اختبار

تباين التوزيع ثنائي الحدين
إذا كان p هو احتمال النجاح و q هو احتمال الفشل في كل اختبار
فإن تباين التوزيع الاحتمالي لـ n اختبار هو $\sigma_x^2 = npq$

ويمكننا برهنه ذلك أيضا باستخدام قوانين التوقع والتباين كما يلي

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{x^2\, n!\, p^x q^{n-x}}{x!\,(n-x)!}$$

وبالتعويض محل x^2 بـ $x(x-1)+x$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{[x(x-1)+x]\,n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{x(x-1)\ n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x-0}^{n} \frac{xn!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)![(n-2)-(x-2)]!} p^x q^{(n-2)-(x-2)} + E(x)$$

$$= n(n-1)\ p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)![(n-2)-(x-2)]!} p^{x-2} q^{(n-2)-(x-2)} + np$$

$$= n(n-1)\ p^2\ (q+p)^{n-2} + np$$

$$= n^2 p^2 - np^2 + np$$

$$\sigma_x^2 = E\ (x2) - [E(x)]^2$$

$$= n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np\ (1 - p)$$

$$= npq$$

وهكذا فان $\sigma^2 = npq$

والانحراف المعياري للتوزيع ثنائي الحدين يساوي الجذر التربيعي الموجب للتباين

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$$

مثال 4 :

بالعودة إلى مثال 3 وهو إلقاء قطعة نقد 100 مره، فما هو التباين والانحراف المعياري لعدد مرات ظهور الوجه صورة؟

الحـل:

دع x تمثل المتغير العشوائي وهو عدد مرات ظهور الوجه صوره، وهكذا فان x لها توزيع ثنائي الحدين فيه

$$P = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$n = 100$$

التباين $= \sigma_x^2 = npq$

$$= 100 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 25$$

الانحراف المعياري $= \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{25} = 5$

2.5 توزيع بواســون Poisson Distribution

يستخدم توزيع بواسون في التجارب التي تكون نتيجتها وقوع الحدث موضع الاهتمام عددا صحيحاً من المرات خلال وحده زمنية محددة (مثل الدقيقة أو الساعة أو اليوم ... الخ) أو على وحده أو منطقة محددة من الحيز (مثل الطول أو المساحة)، بينما يستخدم توزيع ثنائي الحدين لمعرفة عدد مرات وقوع الحدث موضع الاهتمام في عدد محدد من الاختبارات، ومن أمثلة تطبيقات توزيع بواسون:

أ) المسائل التي تحتاج إلى الانتظار أو المرتبطه بالزمن مثل :

- عدد حوادث السير في أسبوع بمدينة ما.
- عدد القطارات التي تغادر المحطة في الساعة.

- عدد المراجعين في أحد مراكز الخدمة في اليوم.
- عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها الراديوتاكسي في الدقيقة.

ب) المسائل التي ترتبط بمناطق الفراغ أو الحيز مثل المسائل المرتبطة بمراقبة الجودة ومنها :

- عدد العيوب الموجودة في قطعة قماش محددة المساحة
- عدد العيوب الموجودة في سلك للهاتف طوله كيلومتران
- عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة التي ترتكبها إحدى السكرتيرات

وهكذا فان المتغير البواســـوني هو متغير متقطع ياخذ قيمة من القيم صـــفر أو 1 أو 2 أو ... في فترة زمنية متصلة أو في حيز أو منطقة متصلة، ويجب أن يحقق الشروط الثلاثة التالية:

1- عدد مرات النجاح مستقلة في فترتين متتاليتين من الزمن أو منطقتين متصلتين من الحيز.

2- احتمال النجاح خلال فترة قصـــيرة من الزمن أو منطقة صـــغيرة من الحيز يتناســـب مع طول هذه الفترة أو منطقة هذا الحيز.

3- احتمال نجاحين أو أكثر خلال فترة زمنية قصـــــيرة أو منطقة من الحيز صـــــغيرة يكون صغيراً جداً بحيث يمكن إهماله.

والتوزيع الاحتمالي لمتغير بواسون العشوائي يدعي بتوزيع بواسون ويعطي حسب التعريف التالي:

توزيع بواسون

إذا كانت X هي متغير بواسون العشوائي وان القيم الممكنة لـ X هي 0، 1، 2، ... فان التوزيع الاحتمالي لـ X يدعى بتوزيع بواسون. ويعطى بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \quad \lambda^{x}}{x\,!}$$

حيث

x = 0، 1، 2 ، ...

e = ثابت قيمته 2.71828

λ = متوسط عدد مرات النجاح في الفترة الزمنية أو منقطة الحيز المحددة وتسمى معلمة التوزيع.

مثال 5:

افترض أن متوسط عدد الزبائن في الدقيقة الذين يدخلون احد المحلات التجارية هو ثلاثة زبائن، باستخدام توزيع بواسون أوجد احتمال ان أربعة زبائن بالضبط سيدخلون المحل خلال دقيقة معينة.

الحل:

دع x تمثل المتغير العشوائي عدد الزبائن الذين يدخلون المحل في الدقيقة، فيكون لــــ x توزيع بواسوني متوسطة λ تساوي 3 باستخدام صيغة توزيع بواسون:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \quad \lambda^{x}}{x\,!}$$

$$p(x=4) = f\,(4) = \frac{e^{-3}\ (3)^{4}}{4\,!}$$

$$= \frac{0.05\ (81)}{24}$$

(حيث $e^{-3} = 0.05$)

$$= \frac{135}{800} = 0.16875$$

مثال 6:

إذا كان متوسط عدد العيوب في شريحة زجاجية كبيرة هو واحد لكل 20 قدم مربع، فما هو احتمال ان شريحة 3 × 10 قدم :

i) لا تحتوي على عيوب.

ii) تحتوي على عيب واحد على الأقل.

الحـل:

دع x تمثل عدد العيوب في الشريحة 3 × 10

فيكون لـ x توزيع بواسوني معلمته هي

$$\lambda = \frac{3 \times 10}{20} = 1.5$$

أي أن متوسط عدد العيوب في الشريحة 3 × 10 هو 1.5

وبتطبيق صيغة بواسون:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \ \lambda^{x}}{x!}$$

i) $P(x=0) = f(0) = \frac{e^{-1.5}\,(1.5)^{0}}{0!} = e^{-1.5} = 0.223$

ii) p (عيب واحد على الأقل) $= 1-p\,(x=0) = 1 - 0.223$

$$= 0.777$$

❖ توقع وتباين توزيع بواسون

Expectation and variance of Poisson distribution

إذا كانت x تمثل متغير بواسوني وبالتالي لها توزيع بواسون

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda > 0$$

فان توقع وتباين متغير بواسون العشوائي x يساوي معلمة التوزيع أي يساوي λ أي أن:

$$\mu_x = E(x) = \lambda$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \lambda$$

البرهان:

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \, f(x)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

ومن المعروف في التفاضل والتكامل أن

$$e^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots = \sum_{x=0}^{1} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\therefore \; E(x) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f(x)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{x^2 e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

بتعويض X^2 بالقيمة $X(X-1)+X$ ينتج

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{[x(x-1)+x]\; e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{[x(x-1)\; e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} + \sum_{0}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{2}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-2)!} + E(x)$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$\text{var}(x) = E(x2) - [E(x)]2$$

$$= (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

3.5 تمارين الفصل الخامس / التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1) صندوق بداخله 20 مصباحاً كهربائيا منها 5 تالفة، سحبنا 4 مصابيح بطريقة عشوائية مع الإعادة أحسب احتمال :

i) الحصول على مصباح واحد معيب (تالف) (27/64)

ii) الحصول على مصباح واحد على الأقل معيب (تالف) (175/256)

2) إذا كان الامتحان يتكون من 10 أسئلة، وكان احتمال أن يجيب الطالب على أي سؤال عشوائي هو 0.2 أوجد الاحتمالات التالية:

i) احتمال الا يجيب الطالب على أي سؤال (0.1074)

ii) أن يجيب على سؤال أو اكثر (0.8926)

iii) أن يجيب على 3 أسئلة فقط (0.2)

3) إذا كان 0.15 من إنتاج إحدى الشـركات من التلفزيونات الملونه معيبا ، شـحن 15 جهازا إلى أحد العملاء . فإذا اعتبرنا كل جهاز تجربة مستقلة فما هو احتمال :

i) أن لا يكون من بين الشحنه أي تلفزيون معيب (0.0873)

ii) أن يكون واحدا أو أقل معيبا (0.3185)

4) إذا القينا حجر النرد 4 مرات وكانت k تمثل عدد مرات ظهور الوجه ســــتة في هذه الرميات الأربع أوجد التوزيع الاحتمالي لـ k .

5) أسره لديها 5 أطفال فإذا كان احتمال أن يكون الطفل ولدا يساوي احتمال أن يكون بنتا ويساوي 1/2 ، فما هو احتمال :

i) أن يكون جميع الأطفال من نفس الجنس (1/16)

ii) أن يكون لدى الأسرة على الأقل ولدا واحدا وبنتا واحدة (15/16)

6) علبة من بذور الورد ثلثها يعطي ورداً أحمرا والباقي يعطي وردا أبيضاً ، فإذا زرعنا 7 بذرات من هذه العلبة فأحسب احتمال :

i) ان لا نحصل على أي ورده حمراء (128/2187)

ii) أن نحصل على ورده واحده حمراء (448/2187)

iii) ان لا نحصل على أي ورده بيضاء (1/2187)

7) إذا كان في المتوسط هاتفا واحدا من بين كل 4 هواتف يكون مشغولا في منطقة تجارية في مدينة ما بين الساعة الحادية عشره والساعة الثانية عشره وان تسعة أرقام عشوائية طلبت في ذلك الوقت أوجد احتمال:

i) أن جميع الهواتف المطلوبة غير مشغولة (0.075)

ii) أن واحدا فقط مشغولا (0.225)

iii) أن اثنين أو أكثر من الهواتف المطلوبة مشغولة (0.700)

8) شــخصــان ألقى كل منهما قطعة نقد خمس مرات إحســب احتمال أنهما حصــلاً على نفس العدد من الصور. (63/256)

9) إذا كان احتمال التهديف للاعب كره ســـلة في كل رمية هو 1/5 فما هو احتمال الحصـــول على 4 أهداف على الأقل من 25 رميه. (0.766)

10) في أحد الامتحانات الشــفوية احتمال أن تجيب نوال على ســؤال اجابه صــحيحة هو 1/3 فما هو احتمال أن يكون السؤال الخامس هو أول سؤال تجيب عليه إجابة صحيحة

(16/243)

11) افترض أن 0.30 من الطلبة يدخنون ، اختيرت عينه عشوائية من 6 أشخاص ، ما هو احتمال أن اثنين منهم على الأقل يدخنون؟ (0.58)

12) إذا كانت درجة الثقة في الترانزيزتور هي 0.90 . راديوبه 10 ترانزيزتورات ، ما هو احتمال وقوع خلل (0.6513)

13) أوجد قيم المعلمات p , n للتوزيع ثنائي الحدين الذي وســطه 9 وتباينه 18/5 (n = 15 ، p = 3/5)

14) أوجـد كـل مـن تـوقـع وتـبـايـن الـتـوزيـع ثـنـائـي الـحـديـن الـذي فـيـه $p = 0.2$ ، $n = 35$

$$(\mu = 7 \quad \sigma^2 = 5.6)$$

15) كتاب مؤلف من 232 صفحة ، به 232 خطأ مطبعي موزعه عشوائيا أحسب احتمال ان صفحة ما :

i) بها بالضبط خطأين $(e^{-1/2} = 0.1839)$

ii) بها أقل من خطأين $(2e^{-1} = 0.7356)$

16) إذا كان متوسط عدد حوادث العمل في مصنع ما هو 4 حوادث شهريا فما هو احتمال :

i) أن لا يقع أي حادث في شهر معين $(e^{-4} = 0.018)$

ii) ان يقع ثلاثة حوادث على الأكثر في شهر معين (0.426)

17) إذا كان متوسط عدد المراجعين في أحد مراكز الخدمة هو اثنان كل خمس دقائق وإذا كان عدد المراجعين يتبع توزيع بواسون، فما هو احتمال:

i) أن لا يصل أي مراجع خلال خمس دقائق $(e^{-2} = 0.135)$

ii) أن أكثر من 4 مراجعين وصلوا خلال 10 دقائق (0.382)

18) ما هو احتمال أن يتلقى أحد السنترالات أربع مكالمات هاتفية خلال دقيقتين إذا كان متوسط عدد المكالمات الهاتفية التي تصل السنترال هو مكالمتان في الدقيقتين؟

(0.09)

19) إذا كان متوسط عدد الأخطاء المطبعية التي ترتكبها إحدى السكرتيرات هو 4 أخطاء في الصفحة، فما هو احتمال:

i) أن تطبع صفحه بدون أخطاء $(e^{-4} = 0.018)$

ii) أن ترتكب خطأين على الأقل في كتابة أحد الصفحات (0.91)

20) إذا كان متوسط عدد العيوب في شريحه زجاجية كبيره هو واحد لكل عشرة أقدام مربعة، فما هو احتمال أن شريحه 6 × 10 قدم:−

i) سوف تكون بدون عيوب $(e^{-6} = 0.0025)$

ii) سيكون بها على الأقل عيب واحد (0.9975)

21) في مصنع لإنتاج أشرطه التسجيل تحدث شروخ في الأشرطة المنتجة عشوائياً بمتوسط شرخ كل 200 متر، أحسب احتمال أن يكون في شريط طوله 500 متر.

i) شرخين على الأكثر (0.543)

ii) على الأقل ثلاث شروخ (0.457)

22) تحدث عيوب في تغطيه رقائق من الصلب بالكروم بمعدل واحد في كل 2م^2 ، ما احتمال أن تكون رقيقه أبعادها 3م × 7م .

i) خاليه من العيوب (0.00001)

ii) بها على الأكثر عيب واحد (0.0001266)

4.5 حل تمارين الفصل الخامس / التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1) دع المتغير x يدل على عدد المصابيح التالفة المسحوبة

فتكون قيم x الممكنة هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

دع p تمثل احتمال سحب مصباح تالف عندئذ $p = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

المتغير x هنا ثنائي الحدين وذلك لان السحب يتم بالإعادة، واحتمال سحب مصباح تالف لا

يتغير من اختبار إلى أخر بل ثابت ويساوي $\frac{1}{4}$

i) $n = 4$

$x = 1$

$p = \frac{1}{4}$

$q = \frac{3}{4}$

وباستخدام صيغة التوزيع ثنائي الحدين نحصل على :

$$P(x = 1) = f(1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$= \frac{4!}{1!\,3!}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$= 4\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{27}{64}\right)$$

$$= \frac{27}{64}$$

(ii

$$P(x \geq 1) = p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4)$$

$$= 1 - p(x = 0)$$

$$= 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$= 1 - 81/256 = 175/256$$

2) دع x تمثل عدد الأسئلة التي يجيب عليها الطالب فتكون قيم x الممكنة هي 10 ، ... ، 1 ، 0

وهكذا

$$n = 10$$

$$p = 0.2$$

$$q = 0.8$$

وباستخدام صيغه التوزيع ثنائي الحدين

i) $f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

$$p(x = 0) = f(0) = \binom{10}{0} (0.2)^0 (0.8)^{10}$$

$$= (0.8)^{10}$$

$$= 0.1074$$

ii) $p(x \geq 1) = f(1) + f(2) \dots + f(10)$

$= 1 - f(0)$

$= 1 - (0.8)^{10}$

$= 0.8926$

iii) $p(x = 3) = f(3) = \binom{10}{3} (0.2)^3 (0.8)^7$

$= 120 (0.008) (0.8)^7$

$= 0.2013$

$\cong 0.2$

3) دع x تمثل عدد الأجهزة المعيبه المشحونه للعميل، فتكون قيم x الممكنة هي

$0 ، 1 ، 2 ، \dots ،15$

$p = 0.15$ احتمال أن يكون الجهاز معيبا

$q = 0.85$ احتمال أن يكون الجهاز سليما

$n = 15$

i) $p(x = 0) = f(0) = \binom{15}{0} (0.15)^0 (0.85)^{15}$

$= (0.85)^{15}$

$= 0.0873$

ii) $p(x \le 1) = p(x=0) + p(x=1)$

$= f(0) + f(1)$

$= \binom{15}{0}(0.15)^0 (0.85)^{15} + \binom{15}{1}(0.15)^1 (0.85)^{14}$

$= 0.0873 + 15\,(0.15)\,(0.85)^{14}$

$= 0.0873 + 0.2312$

$= 0.3185$

4) القيم الممكنة لـ k هي :

0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4

$n = 4$

$p = \frac{1}{6}$ احتمال الحصول على الوجه سته

$q = \frac{5}{6}$

$$p(K=k) = f(k) = \binom{4}{K}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$$

والجدول التالي يعطي التوزيع الاحتمالي للمتغير K

القاء حجر النرد 4 مرات

K	P_k	P_k
0	$(5/6)^4$	0.4823
1	$4(1/6)\ (5/6)^3$	0.3858
2	$6(1/6)^2\ (5/6)^2$	0.1157
3	$4(1/6)^3\ (5/6)$	0.0154
4	$(1/6)^4$	0.0008

5) دع x تمثل عدد الأولاد من بين الأطفال، فتكون قيم x الممكنة هي 5 ، ... ، 1 ، 0

$n = 5$

$p = \frac{1}{2}$ احتمال أن يكون الطفل ولدا

$q = \frac{1}{2}$ احتمال أن يكون الطفل بنتا

i)

احتمال أن يكون لدى الأسره ولدا واحدا وبنتا واحده على الأقل هو احتمال أن يكون لديها ولد أو اثنين أو ثلاثه أو أربعة، أي أن لا يكون لديها 5 أولاد أو 5 بنات

فيكون الاحتمال المطلوب يساوي

$$P = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$= \binom{5}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \binom{5}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}=\frac{15}{16}$$

أو

الاحتمال المطلوب = $1-$ (احتمال الخمسة اولاد + احتمال الخمسة بنات)

$$= 1 - [P(5)+P(0)]$$

$$= 1-\left[\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right]=\frac{15}{16}$$

ii)

الاحتمال المطلوب يساوي احتمال كلهم أولاد + احتمال كلهم بنات

$$P = P(0) + P(5)$$

$$= \frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{16}$$

6) دع x تمثل عدد الوردات الحمراء التي تحصل عليها من زرع 7 بذرات، فتكون قيم x الممكنة

هي 0 ، 1 ، 2 ، 7

دع p احتمال الحصول على ورده حمراء

q احتمال عدم الحصول على ورده حمراء

$$p = \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{2}{3}$$

i) $$p(0) = f(0) = \binom{7}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^7$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^7=\frac{128}{2187}=0.05853$$

ii) $p(1) = f(1) = \binom{7}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^6$

$$= 7\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{448}{2187} = 0.2048$$

iii) $p(7) = f(7) = \binom{7}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right)^0$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187} = 0.0005$$

7) دع x تمثل عدد الهواتف المشغوله ، فتكون قيم x الممكنة هي 0 ، 1 ، 2 ، ... 9

$n = 9$

$p = \frac{1}{4}$

$q = \frac{3}{4}$

i) احتمال أن جميع الهواتف المطلوبة غير مشغوله هو احتمال أن يكون صفر منها مشغولاً

$$P(x = 0) = f(0) = \binom{9}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^9$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^9$$

$$= 0.075$$

ii) احتمال أن واحدا فقط مشغولا

$$P(x = 1) = f(1) = \binom{9}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^8$$

$$= 0.225$$

iii) احتمال أن اثنين أو اكثر مشغوله

$$P(x \ge 2) = p(x=2) + p(x=3) + \dots + p(x=9)$$

$$= 1 - [p(x=0) + p(x=1)]$$

$$= 1 - 0.075 - 0.225$$

$$= 0.7$$

8) د ع x تمثل عدد مرات الحصول على وجه الصوره عند القاء قطعه عمله 5 مرات، فتكون قيم x الممكنة لكل شخص هي 1،0 ، 2 ... 5

$$n = 5$$

$$p = q = 1/2$$

يحصلان على نفس العدد من الصور إذا حصل كل منهما على صفر أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أي

(5 و 5) أو (4 و 4) أو (3 و 3) أو (2 و 2) أو (1 و 1) أو (0 و 0)

احتمال الحصول على كل حالة من هذه الحالات يساوي

$$\left[\binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^2$$

فمثلاً

$$(0\ ,\ 0) = P(0)\ \ p(0)$$

$$= \left[\left\{ \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\} \left\{ \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\} \right]$$

$$= \left[\binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right]^2$$

∴ احتمال أن يحصلا على نفس العدد من الصور هو

$$P = \left[\left\{ \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\}^2 + \left\{ \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\}^2 + \left\{ \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\}^2 + \left\{ \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\}^2 + \left\{ \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\}^2 + \left\{ \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\}^2 \right]$$

$$= \left(\frac{1}{2^{10}}\right) + 25\left(\frac{1}{2^{10}}\right) + 100\left(\frac{1}{2^{10}}\right) + 100\left(\frac{1}{2^{10}}\right) + 25\left(\frac{1}{2^{10}}\right) + \left(\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= \frac{252}{2^{10}} = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$$

9) دع x تمثل عدد الأهداف المتحققه من 25 رميه ، فتكون قيم x الممكنة هي 0 ، 1 ، ... 25

$q = \frac{4}{5}$ ، $p = \frac{1}{5}$ ، $n = 25$

احتمال الحصول على أربعة أهداف على الأقل هو احتمال الحصول على أربعة أهداف أو أكثر

وهو

$$P = (x = 4) + p\,(x = 5) + \ldots + p\,(x = 25)$$

$$= 1 - [p\,(x = 0) + p\,(x = 1) + p\,(x = 2) + p\,(x = 3)]$$

$$= 1 - \left[\binom{25}{0}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{25} + \binom{25}{1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{24} + \binom{25}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{23} + \binom{25}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{22} \right]$$

$$= 1-(0.0037777 + 0.0236110 + 0.0708336 + 0.1357644)$$

$$= 0.766$$

10) احتمـــــال أن يكون السؤال الخامس هو أول سؤال يجاب عليه إجابة صحيحة هو احتمال أن يجاب على الأسئلة الأربعة الأولى بإجابات خاطئة ويجاب على السؤال الخامس إجابة صـحيحة ويساوي:

$$p = \left[\binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\right]\left[\binom{1}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\right]$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{4}\frac{1}{3} = \frac{16}{3^5} = \frac{16}{243}$$

أو

$$P = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{243}$$

11) دع x تمثل عدد المدخنين، فتكون قيم x الممكنة هي: 0 ، 1 ، ... 6

احتمال أن يكون الطالب مدخنا هو احتمال النجاح = p = 0.30

احتمال أن يكون الطالب غير مدخن هو احتمال الفشل = q = 0.70

$6 = n$

احتمال أن اثنين من العينة على الأقل مدخنون هو احتمال ان يكون عدد المدخنين 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 هو

$$P\ (x \geq 2) = 1 - p\ (x < 2)$$

$$= 1 - [p\ (x = 0) + p(x = 1)]$$

وهكذا

$$P = 1 - [\ \binom{6}{0}(0.3)^0\ (0.7)^6 + \binom{6}{1}(0.3)^1\ (0.7)^5]$$

$$= 1 - (0.117649 + 0.302526)$$

$$= 0.579825$$

12) يقـــع الخلل إذا اختـــل أو تلف ترانزيزتور واحـــد على الأقـــل ، دع x تمثل المتغير عدد الترانزيزتورات التالفه، وتكون قيم x الممكنة هي

$$(0 \text{ ، } 1 \text{ ، } 2 \text{ ، } \ldots \text{ ، } 10)$$

احتمال النجاح = احتمال وقوع خلل = p = 0.1

احتمال الفشل = احتمال عدم وقوع خلل = q = 0.9

$10 = n$

احتمال وقوع خلل = واحد ناقص احتمال عدم وقوع خلل = واحد ناقص احتمال أن تكون كلها تعمل

$$P = 1 - \binom{10}{0}\ (0.1)^0\ (0.9)^{10} = 1 - (0.9)^{10}$$

$$= 0.6513$$

13) الوسط الحسابي أو التوقع للتوزيع ثنائي الحدين يساوي np

والتباين للتوزيع ثنائي الحدين يساوي npq

$Np = 9$ ………………… (1)

$npq = \frac{18}{5}$ ……………… (2)

بتعويض (1) في (2)

$9q = \frac{18}{5}$

$q = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$

$p = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

بتعويض قيمة P في (1)

$n = 9 \div \frac{3}{5} = \frac{45}{3} = 15$

(14

$n = 35$

$p = 0.2$

$q = 0.8$

التوقع $= np$

التباين $= npq$

$np = \mu$

$$\therefore \quad \mu = 35\ (0.2) = 7$$

$$\sigma^2 = npq$$

$$\sigma^2 = 7\ (0.8) = 5.6$$

15) دع x تمثل عدد الأخطاء في الصفحة الواحدة، فيكون لـ x توزيع بواسون بمتوسط خطأ واحد في كل صفحة

$$\lambda = \frac{232}{232} = 1$$

(i

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \quad \lambda^x}{x!}$$

$$p\ (x = 2) = f(2) = \frac{e^{-1}\ (1)^2}{2!}$$

$$= e^{-1}/2 = 0.1839$$

حيث

$$e^{-1} = 0.368$$

(ii

$$P\ (x < 2) = \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-1}\,(1)^x}{x!}$$

$$= e^{-1}\ (1 + \frac{1}{11})$$

$$= 2\ e^{-1}$$

$$= 0.736$$

16) دع x تمثل عدد الحوادث في الشهر المعين فيكون لها توزيع بواسون الذي معلمته = 4

(i

$$f(0) = \frac{e^{-4}(4)^0}{0!}$$

$$= e^{-4}$$

$$= 0.018$$

(ii

$$P(x \le 3) = \sum \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!}$$

$$= p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3)$$

$$f(0) = e^{-4} = 0.018$$

$$f(1) = \frac{e^{-4}\,4}{1!} = 0.072$$

$$f(2) = \frac{e^{-4}(4)^2}{2!} = 0.144$$

$$f(3) = \frac{e^{-4}(4)^3}{3!} = 0.192$$

$$f(x \le 3) = 0.426$$

17) دع x هي المتغير وهي عدد المراجعين

متوسط عدد المراجعين في الدقيقة $= \lambda = \frac{2}{5}$

متوسط عدد المراجعين في 5 دقائق = 2

متوسط عدد المراجعين في 10 دقائق = 4

$\therefore$ $\lambda = 2$ في خمس دقائق

$\lambda = 4$ في عشر دقائق

i) $P(x = 0) = f(0) = \dfrac{e^{-2}\, 2^0}{0!}$

$= e^{-2}$

$= 0.135$

ii) $\lambda = 4$ $\qquad P(x > 4) = 1 - P(x \le 4)$

$$P(x \le 4) = \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^x}{x!}$$

$= P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4)$

$f(0) = e^{-4} = 0.018$

$f(1) = e^{-4}(4) = 0.072$

$f(2) = \dfrac{e^{-4}(4)^2}{2!} = 8\, e^{-4} = 0.144$

$f(3) = e^{-4}\left(\dfrac{64}{6}\right) = 0.192$

$f(4) = \dfrac{e^{-4}(4)^4}{4!} = \dfrac{64}{6}\, e^{-4} = 0.192$

0.618

$$\therefore \ P(x > 4) = 1 - P(x \leq 4)$$

$$= 1 - 0.618$$

$$= 0.382$$

18) دع x تمثل المتغير عدد المكالمات الهاتفية التي تصل خلال دقيقتين فيكون لها توزيع بواسون

بمعلمه $\lambda = 2$

$$P(x = 4) = f(4) = \frac{e^{-2} \ 2^4}{4}$$

$$= \frac{2}{3} \ e^{-2}$$

$$= \frac{2(0.135)}{3} = \frac{270}{3}$$

$$= 0.090$$

19) دع x تمثل المتغير عدد الأخطاء المرتكبة في الصفحة فيكون لـ x توزيع بواسون بمعلمه $\lambda = 4$

i) $$P(x = 0) = f(0) = \frac{e^{-2} \ 2^4}{0!}$$

$$= e^{-4} = 0.018$$

ii) $$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + (P(X = 1)]$$

$= 1 - (0.018 + 4\,e^{-4})$

$= 1 - (0.018 + 0.072)$

$= 0.91$

20) دع x تمثل عدد العيوب في الشريحه 6×10 قدم

يكون لـ x توزيع بواسون الذي معلمته $\lambda = \frac{(6)\ (10)}{10} = 6$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{x}}{x!}$$

i) $P(x = 0) = f(0) = e^{-6} = 0.0025$

ii) $P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x = 0)$

$= 1 - f(0)$

$= 1 - 0.0025$

$= 0.9975$

21) دع x تمثل عدد الشروخ في الـ 500متر

$\therefore \quad \lambda = \frac{500}{200} = 2.5$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{x}}{x!}$$

i) $P(x \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$

$f(0) = e^{-2.5}$

$f(1) = e^{-2.5}$

$f(2) = \dfrac{e^{-2.5}(2.5)^2}{2} = 3.126\,e^{-2.5}$

$P(x \le 2) = 6.625\ e^{-2.5} = (6.625)(0.082) = 0.543$

ii) $P(x \ge 3) = 1 - P(x < 3)$

$= 1 - \{f(0) + f(1) + f(2)\}$

$= 1 - 0.543$

$= 0.457$

22) دع x تمثل عدد العيوب في الرقيقة 3 × 7 م

$f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $\qquad 11.5 = \dfrac{21}{2} = \lambda$

i) $P(x = 0) = f(0) = e^{-11.5} = 0.00001$

ii) $P(x \le 1) = f(0) + f(1)$

$f(1) = e^{-11.5}\ 11.5$

$f(0) + f(1) = 12.5\ e^{-11.5} = 0.0001266$

الفصل السادس

التوزيع الطبيعي

The Normal Distribution

1.6 تعريف التوزيع الطبيعي Definition normal distribution

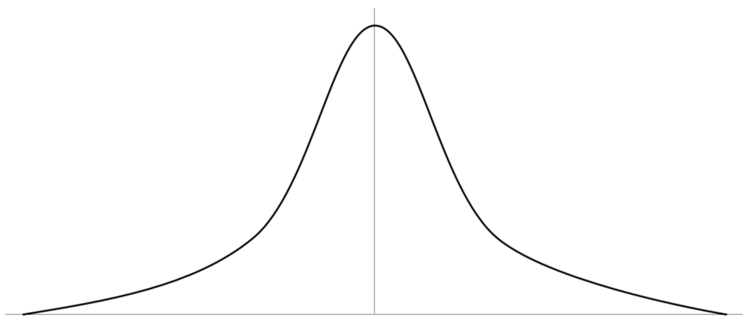
يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استعمالا على الاطلاق، بل انه يحتل موضع الصداره في الاحتمالات والاحصاء، وقد اشتق اسمه من أن كثيرا من التوزيعات "الطبيعية" تأخذ شكلا قريبا منه، كذلك فإن معظم التوزيعات البيومتريه (كتوزيعات الطول والوزن) وتوزيعات أخطاء المشاهدات (الفروق بين القيم الحقيقيه والقيم المشاهده) تأخذ شكلا قريبا منه، ويستخدم هذا التوزيع في كثير من التجارب الصناعية واختبارات الجوده وله استخدامات واسعه في اختبارات الفروض والعينات الكبيرة وتوزيعات المعاينه وغيرها.

كان أول من اكتشف هذا التوزيع العالم دي موافر De Moiver عام 1733 ، ومن بعده العالم غوس Gauss في عام 1809 ، ويعرف هذا التوزيع أيضاً باسمه أي توزيع غوس Gauss Distribution ولهذا التوزيع خواصه الرياضية، ويمكن ان يكون تقريبا أو حالة خاصة لتوزيعات أخرى مثل توزيع ثنائي الحدين.

منحنى هذا التوزيع يدعى بالمنحنى الطبيعي، وعندما نتكلم عن منحنى توزيع نظري فأننا نقصد منحنى دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي الذي له هذا التوزيع، ومنحنى التوزيع الطبيعي متماثل حول خط راسي يمر بالوسط الحسابي الذي يساوي بسبب التماثل كلا من الوسيط والموال، وهو ناقوسي الشكل له

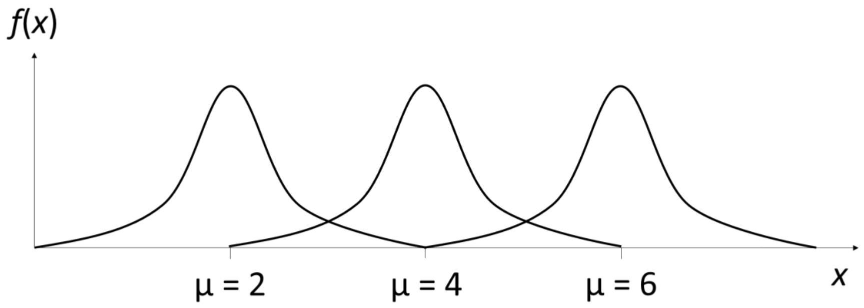
قمه واحده ويمتد طرفاه إلى ما لا نهاية يمينا ويسـارا (فيقترب طرفاه من المحور الأفقي ولكنهما لا يلتقيان معه)، ومع ذلك فان المسـاحة تحت المنحنى تسـاوي الواحد الصـحيح كما هو الحال في المسـاحة تحت منحنى داله كثافة احتمال أي متغير عشوائي متصل أخر.

والشكل 1 يمثل المنحنى :



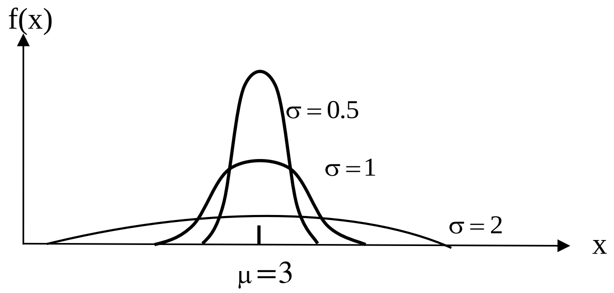
شكل 1
التوزيع الطبيعي

هناك عدد لا نهائي من المنحنيات الطبيعية ولكنها تختلف عن بعضـــها البعض حســـب قيمة كل من الوسـط الحسـابي (التوقع) μ والانحراف المعياري σ، وقد تتفق منحنيات طبيعية في الانحراف المعياري ولكنها تختلف في الوسط الحسابي كما هو في الشكل 2، أو قد تتفق بالوسط الحسابي وتختلف بالانحراف المعياري كما هو في الشكل 3



شكل 2

منحنيات طبيعية لها نفس الانحراف المعياري مع اختلاف الوسط الحسابي



شكل 3

منحنيات طبيعية لها نفس الوسط الحسابي مع اختلاف الانحراف المعياري

2.6 بعض خواص المنحنى الطبيعي

Some properties of a normal distribution

1) المنحنى الطبيعي متماثل حول الوسط الحسابي μ أي أن المنحنى على يسار الوسط الحسابي يماثل المنحنى على يمينه

2) الوسط الحسابي في المنتصف ويقسم المساحه تحت المنحنى إلى قسمين متساويين

3) مجموع المساحه تحت المنحنى تساوي واحد

4) مهما كانت قيمة μ و σ فإن للمنحنى الطبيعي الخواص التالية:

i) حوالي 68.26% من المساحه يقع بين القيمتين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$

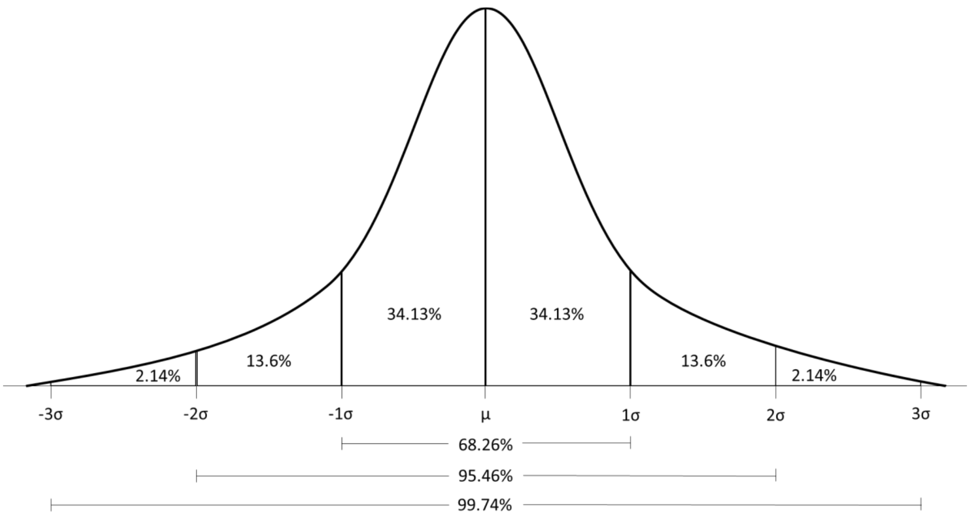
ii) حوالي 95.46% من المساحه يقع بين القيمتين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$

iii) حوالي 99.74% من المساحة يقع بين القيمتين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$

iv) حوالي 95% من المساحة يقع بين القيمتين $\mu - 1.96\sigma$ و $\mu + 1.96\sigma$

v) حوالي 99% من المساحة يقع بين القيمتين $\mu - 2.58\sigma$ و $\mu + 2.58\sigma$

كما هو موضح في الشكل 4 التالي:



يقال للمتغير العشوائي المتصل x بانه موزع طبيعيا إذا كانت داله كثافة الاحتمال له معطاه بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث

$-\infty > x < \infty$

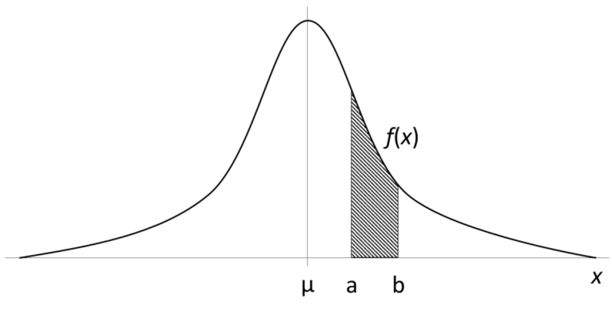
μ هي الوسط الحسابي للمتغير الطبيعي

e ثابت قيمته 2.71828

π هي النسبة التقريبية وتساوي 3.14159

ويكتب التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي μ وتباينه σ^2 (فيكون انحرافه المعياري يساوي σ) يكتب بالرمز $N(\mu\ ,\ \sigma^2)$، فمثلا $N\ (20,4)$ تعني متغيرا طبيعيا له وسط حسابي (توقع) يساوي 20 وتباين يساوي 4 (أي انحراف معيار يساوي 2).

بما أن $f\ (x)$ داله كثافة احتمال يكون مجموع المساحة تحت منحنى هذه الداله مساويا لواحد صحيح واحتمال أن متغيراً عشوائيا متصلا وسطه μ وتباينه σ^2 يقع بين قيمتين محددتين مثل $b\ ,\ a$ هو $p\ (a < x < b\ )$ ويساوي المساحة المحصوره بين منحنى الداله $f\ (x)$ والقيمتين $x = b\ ,\ x = a$



الشكل 5

3.6 التوزيع الطبيعي القياسي أو المعياري

The Standard Normal Distribution

يطلق اسم المتغير الطبيعي المعياري أو القياسي على المتغير الطبيعي الذي وسطه الحسابي صفر وتباينه واحد، أي على المتغير $N(0.1)$ ويرمز له بالرمز z وتكون داله كثافة احتماله هي

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$-\infty < z < \infty$$

وبما أن $f(z)$ داله كثافة احتمال فان مجموع المساحة تحت منحنى $f(z)$ تساوي 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz = 1$$

ويكون احتمال وقوع المتغير العشـوائي الطبيعي المعياري z بين القيمتين $z = a$ ، $z = b$ هو المسـاحة المحصوره بين منحنى داله كثافة الاحتمال $f(z)$ والقيمتين المحددتين $z = a$ ، $z = b$ أي يساوي

$$P(a < z < b) = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz$$

لقد حسبت المساحة (أو الاحتمالات) تحت المنحنى الطبيعي المعياري وهي معطاه في الجدول 2 بالمحلق.

لحساب احتمال وقوع المتغير الطبيعي المتصل بين قيمتين محددتين علينا أن نحسب المساحة المحصوره بين منحنى داله كثافة الاحتمال f (x) والقيمتين المحددتين لـ X، ولما كانت f(x) تتضمن معلمتين هما الوسط الحسابي μ والتباين σ^2 وهما ما يمكنهما أن يأخذا قيما غير محدوده، وأن المتغير العشوائي متغير متصل، وبالتالي يمكنه ان يأخذ هو أيضاً قيما غير محدوده داخل أي مدى، فإنه من غير الممكن حساب المساحات الواقعه تحت المنحنى الطبيعي لقيم مختلفه لكل من μ , σ^2 , x ، ولكننا نستطيع التغلب على هذه الصعوبة بتحويل المتغير الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ إلى متغير معياري $N(0.1)$ وهو ما يمكن حساب المساحه تحت منحناه وهي معطاه كما أسلفنا في الجدول 2 بالملحق.

4.6 تحويل المتغير الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ إلى المتغير الطبيعي القياسي $N(0.1)$

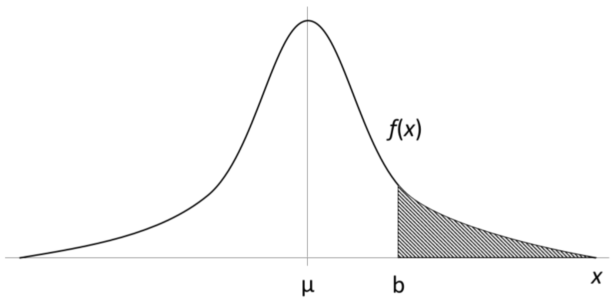
إذا كان المتغير العشوائي x له التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإن المتغير العشوائي $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ يكون له التوزيع الطبيعي المعياري $N(0.1)$، أي يكون له توزيعاً طبيعيا معياريا وسطه الحسابي صفر وتباينه 1، وان أي متغير طبيعي وسطه الحسابي μ وتباينه σ^2 يمكن تحويله إلى متغير طبيعي معياري بكتابه $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ وبهذا يتحول التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري يمكن حساب المساحة المحصوره تحت منحناه كما في الشكل 6.

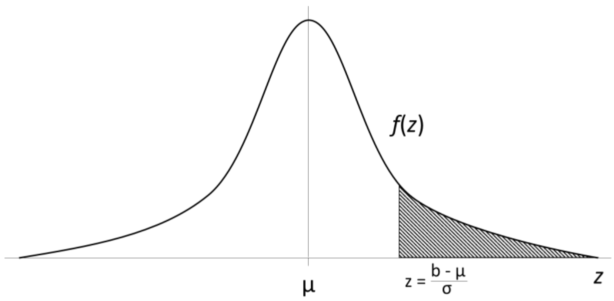
إذا كانت b قيمة معينة من قيم x فان

$$P(x \le b) = P(x - \mu \le b - \mu)$$

$$= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$





شكل 6

تحويل المتغير $N(\mu, \sigma^2)$ إلى z

المساحة غير المظلله تحت المنحنى هي

$$P(X \le b) = P\left(Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

ويكون أيضا

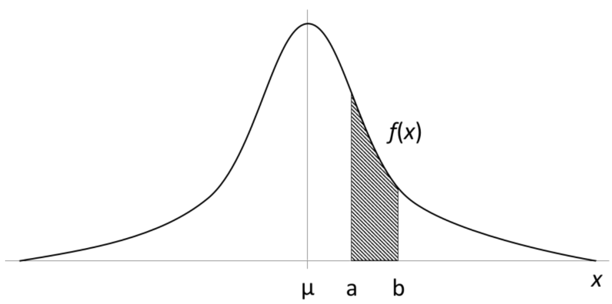
$$P(X > b) = 1 - P(X \le b)$$

$$= 1 - P\left(Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

وإذا كانت a< b (كما في شكل 7) فان

$$P(a \le X \le b) = P\left(Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

أي تساوي المساحة إلى يسار b ناقص المساحة إلى يسار a



شكل 7

ومن خاصية التماثل لمنحنى داله كثافة الاحتمال حول الصفر نجد أن

$$\text{i)} \quad \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} f(z)\,dz + \int_{o}^{x} f(z)\,dz$$

$$= \tfrac{1}{2} + \int_{o}^{x} f(z)\,dz$$

$$\text{ii)} \quad \int_{-\infty}^{-x} f(z)\,dz = \int_{x}^{\infty} f(z)\,dz$$

$$= \tfrac{1}{2} - \int_{0}^{x} f(z)\,dz$$

ولذلك يكتفى في الجداول المحســـوبة لقيم المســـاحات أو الاحتمالات تحت المنحنى الطبيعي المعياري بحساب الاحتمالات المختلفة لقيم x الموجبه، ومنها يمكن استنتاج الاحتمالات لقيم x السالبة.

أمثلــة :

مثـال 1:

إذا كانت X متغير عشـــوائي طبيعي له التوزيع (4 ، 3) N، فما هو احتمال أن تقع X بين القيمتين 3 ، 5؟

الحـل :

نحول التوزيع إلى توزيع معياري

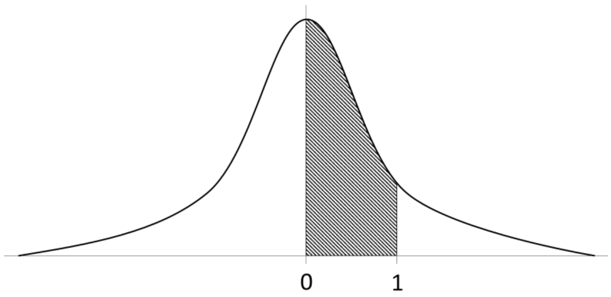
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{3-3}{2} = 0$$

$$z_2 = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$p\,(3 < x < 5) = p\,(0 < z < 1)$$

وتساوي المساحه بين $z = 0$ و $z = 1$ وهي كما في الشكل التالي:



وهي من الجدول 2 بالملحق تساوي 0.3413

مثال 2:

إذا كان المغير العشوائي X له التوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ اوجد :

i) $P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma)$

ii) $P(\mu-2\sigma < x < \mu+2\sigma)$

iii) $P(\mu-3\sigma < x < \mu+3\sigma)$

الحل:

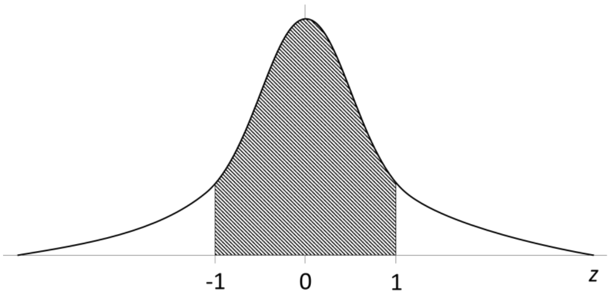
i) $z_1 = \dfrac{(\mu-\sigma)-\mu}{\sigma} = -1$

$z_2 = \dfrac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma} = 1$

$\therefore P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma) = P(-1 < z < 1)$

وهو عبارة عن المساحة بين $z = -1$ و $z = 1$

= المساحة بين $z = 1$ و $z = 0$ + المساحة بين $z = 0$ و $z = -1$



ونتيجة لتماثل المنحنى على يمين ويسار الوسط الحسابي $\mu = 0$ فان المساحة بين $z = -1$ و $z = 0$

تساوي المساحة بين $z = 0$ و $z = 1$ كما في الشكل أعلاه وتساوي من الجدول 0.3413

$$\therefore\ P\,(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 0.3413 + 0.3413$$

$$= 0.6826$$

$$= 68.26\ \%$$

وهذا يعني أن 68.26% من مجموع المساحة تحت المنحنى تقع ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي.

ii) $P\,(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma)$

$$z_1 = \frac{(\mu - 2\sigma) - \mu}{\sigma} = -2$$

$$z_2 = \frac{(\mu + 2\sigma) - \mu}{\sigma} = 2$$

$$\therefore\ P\,(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(-2 < z < 2)$$

وتساوي المساحة المحصوره بين $z = -2$ و $z = 0$ + المساحة المحصورة بين $z = 0$ و $z = 2$

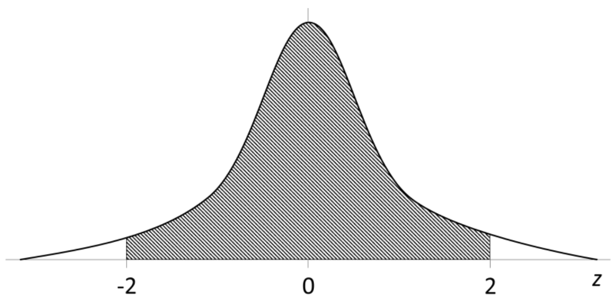
ومن الجدول

$= 0.4773 + 0.4773$

$= 0.9546$

$= 95.46\ \%$

أي أن 95.46% من مجموع المساحة تحت المنحنى تقع ضمن انحرافين معياريين من الوسط الحسابي صفر .



iii) $z_1 = \frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma} = -3$

$z_1 = \frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma} = 3$

$\therefore$ P $(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = P(-3 < z < 3)$

وتساوي المساحة المحصوره بين $z = -3$ و $z = 0$ + المساحة المحصورة بين $z = 0$ و $z = 3$

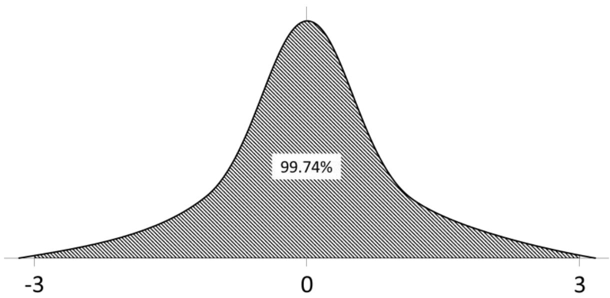
ومن الجدول:

$= 0.4987 + 0.4987$

$= 0.9974$

$= 99.74\%$

أي أن 99.74% من مجموع المســـاحة تحت المنحنى تقع ضـــمن 3 انحرافات معياريه عن الوســـط الحسابي .



5.6 تمارين الفصل السادس / التوزيع الطبيعي

1. من التوزيع الطبيعي المعياري أوجد الاحتمالات التالية:

i) $P(0 < z < 0.7)$ (0.2580)

ii) $P(0 < z < 1.2)$ (0.3849)

iii) $P(-1 < z < 0)$ (0.3413)

iv) $P(-0.82 < z < 0.96)$ (0.6254)

v) $P(z < -0.6)$ (0.2742)

vi) $P(z > -1.1)$ (0.8643)

2. أوجد المساحة تحت $z = -0.5$

3. إذا كان المتغير العشوائي x له التوزيع الطبيعي $N(2, 1)$ أوجد :

i) $P(x > 4)$ (0.0227)

ii) $P(0 < x < 2)$ (0.4773)

4. إذا كانت أطوال طلاب احدى الجامعات موزعه طبيعيا، ولها التوزيع الطبيعي الذي وســـطه الحسابي 68.50 بوصه وانحرافه المعياري 2.3 بوصه:

i) ما هو احتمال ان طول أي طالب من الجامعة يزيد عن 6 أقدام (72 بوصه) (0.0643)

ii) ما هي نســبة الطلبه في الجامعة الذين تتراوح أطوالهم بين 70 و 72 بوصه (0.1935)

5. إذا كانت أطوال 3000 طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، وكان الوسط الحسابي لهذه الأطوال يساوي 170 سم والانحراف المعياري لها يساوي 5سم

i) أوجد نسبة الطلبة الذين أطوالهم أكثر من 185سم.

ii) أوجد عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 185سم.

iii) إذا كانت نسبة الطلبة الذين أطوالهم فوق المتوسط وأقل من طول معين وليكن x هو 0.2881 فما هو هذا الطول؟.

6. إذا كان المتغير العشــوائي x له التوزيع الطبيعي الذي وســطه الحســابي 80 وانحرافه المعياري 0.30 فأوجد:

i) $P(X \leq 80.36)$

ii) العدد C إذا كان $P(X \leq C) = 0.95$

7. مصــنع ينتج نوعا من الأبر مفروض أن يكون قطر كل منها $\frac{1}{4}$ سـم، وبالخبره وجد أن أقطار الأبر من انتاج هذا المصـــنع لها توزيع طبيعي وســـطه الحســـابي 2.5 مم وانحرافه المعياري 0.0025 مم، فما هي النسبة المئوية للأبر التي يتراوح قطرها بين 2.4951 و 2.5049 مم؟

8. إذا كان متوســط أجر العامل 4 دنانير في الســاعة بانحراف معياري 0.50 دينار، وإذا كانت الأجور تتبع توزيعا طبيعيا، فما هي نسـبة العمال الذين يتقاضـون أجرا ما بين 2.5 و 3 دنانير في الساعة؟

9. إذا كان متوسـط عمر المصـباح الكهربائي 1500 سـاعة بانحراف معياري 50 سـاعة، ويتبع توزيعا طبيعيا فما هو احتمال :

i) ان مصباحا سيحترق قبل 1400 ساعة

ii) إن مصباحا سيعيش أكثر من 1550 ساعة

iii) إنا مصباحا سيعيش ما بين 1450 و 1550 ساعة

10. صـندوق من التفاح وزن التفاحه منه يسـاوي 10 أونس (OUNCES) بانحراف معياري 1.5 أونس، وأوزان التفاح موزعه طبيعيا، فما هي نســبة التفاحات التي يقع وزنها بين 7.9 و 12.4 أونس؟

11. إذا كانت نفقات إحدى الشركات في السنة لها التوزيع الطبيعي الذي وسطه 100 مليون دينار وانحرافه المعياري 5 ملايين دينار :

i) ما هو احتمال ان نفقات الشركة ستزيد عن 100 مليون دينار

ii) ما هو احتمال ان نفقات الشركة ستقل عن 100 مليون دينار

iii) ما هو احتمال ان نفقات الشـركة سـتكون بين 100 و 110 مليون دينار

6.6 حل تمارين الفصل السادس / التوزيع الطبيعي

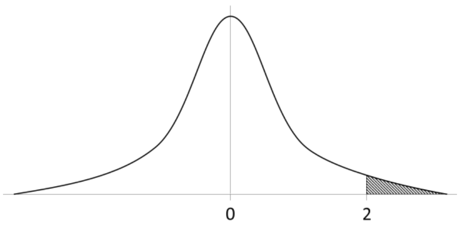
1. نجد الاحتمالات المطلوبة مباشره من الجدول 2 بالملحق.

2. المســـاحة المطلوبة هي المســـاحة المظللة في الشـــكل والمحصــورة بين $-\infty$ و -0.5 وهي تماثل المســاحة من 0.5 حتى ∞ ناقص المساحة من صفر حتى 0.5 ومن الجدول =

$$0.5 - 0.1915 = 0.3085$$

3. نحول التوزيع الطبيعي إلى توزيع معياري

i) $z = \dfrac{z - \mu}{\sigma}$



$$z = \frac{4-2}{1} = 2$$

$$\therefore \ P(X > 4) = P(z > 2)$$

$$= 0.5 - 0.4773$$

$$= 0.0227$$

ii) $Z_1 = \dfrac{0 - 2}{1} = -2$

$$Z_2 = \frac{2 - 2}{1} = 0$$

$$\therefore \quad P(0 < X < 2) = P(z > 2) = P(-2 < z < 0)$$

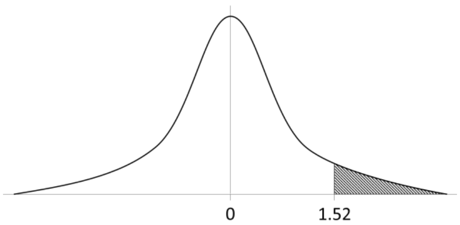
$$= P(0 < z < 2)$$

$$= 0.4773$$

.4

(i

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



$$= \frac{72 - 68.5}{2.3} = \frac{3.5}{2.3}$$

$$= 1.52$$

$$\therefore \; p\,(x > 72) = p\,(z > 1.52)$$

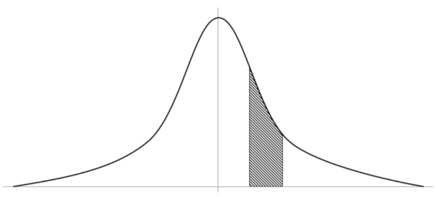
$$= 0.5 - 0.4357$$

$$= 0643$$

(ii

$$z_1 = \frac{70 - 68.5}{2.3} = 0.65$$

$$z_2 = \frac{72 - 68.5}{2.3} = 1.52$$



$$\therefore \; P\,(70 < x < 72) =$$

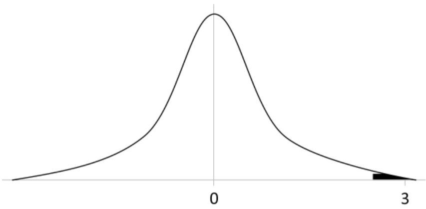
$$P\,(0.65 < z < 1.52)$$

$$= 0.4357 - 0.2422$$

$$= 0.1935$$

5. i.

$$z = \frac{185-170}{5} = 3$$



$$\therefore P(x > 185) = P(z > 3)$$

$$= 0.5 - 0.4987$$

$$= 0.0013$$

ii.

$$3000 = 100\%$$

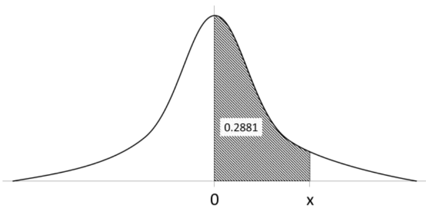
$$x = 0.13\%$$

$$x = (0.0013)(3000)$$

$$= 3.9 \cong 4$$

iii.

$$z = \frac{x - 170}{5}$$



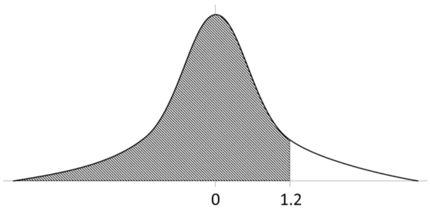
ومن الجدول نجد ان قيمة z المناظره للمسـاحة

0.2881 هي 0.8

$$\therefore 0.8 = \frac{\chi - 170}{5}$$

$$x = 174$$

.6 .i



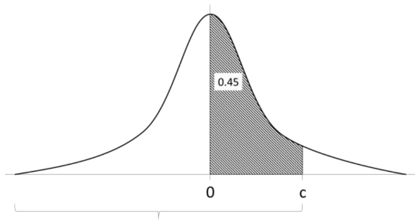
$$Z = \frac{80 - 36 - 80}{0.3} = 1.2$$

$$\therefore\ p\ (x \le 80.36) = p(z \le 1.2)$$

$$= 0.5 + 0.3849$$

$$= 0.8849$$

.ii



كامل هذه المساحة $= 0.95$
أخذنا المساحة تحت 0.45 لان الجداول معطاة من
الصفر حتى ∞ وليس من $-\infty$ حتى ∞

$$z = \frac{c - 80}{0.3}$$

من الجدول نجد أن قيمة z المقابلة للمساحة

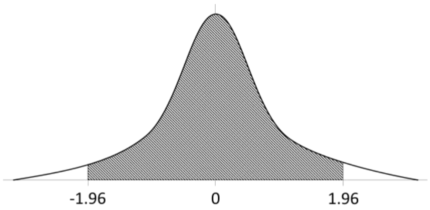
(0.50 – 0.95) أي للمســاحة 0.45 هي

1.64

$$\therefore\ \frac{c - 80}{0.3} = 1.64$$

$$\therefore\ c = 80.492$$

.7



$$z_1 = \frac{2.4951-2.5}{0.0025} = 1.96$$

$$z_2 = \frac{2.5049-2.5}{0.0025} = 1.96$$

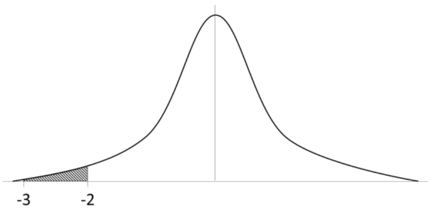
$\therefore$ P $(2.4951 < x < 2.5049)$

$= P\ (-1.96 < z < 1.96)$

$= 2\ (0.4750)$

$= 0.95$

.8



$$z_1 = \frac{2.5-4}{0.5} = -3$$

$$z_2 = \frac{3-4}{0.5} = -2$$

$\therefore p(2.5 < x < 3) =$

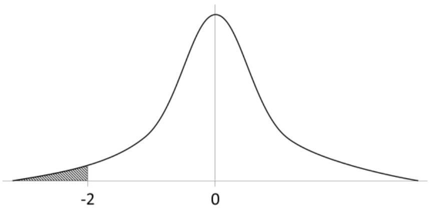
$p\ (-3 < z < -2)$

$= p\ (2 < z < 3)$

$= 0.4987 - 0.4773$

$= 0.0214$

.9 .i



$$z = \frac{1400 - 1500}{50} = -2$$

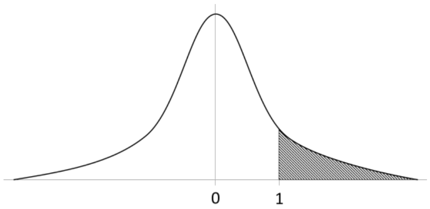
$\therefore \quad p\,(x < 1400) =$

$p\,(z < -2\;)$

$= 0.5 - 0.4773$

$= 0.0227$

.ii



$$z = \frac{1550 - 1500}{50} = 1$$

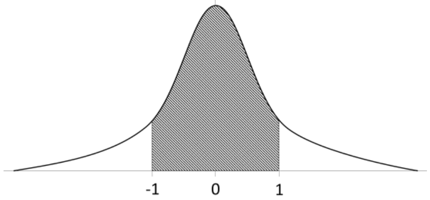
$\therefore\; p\,(\,x > 1550) =$

$p\,(z > 1\;)$

$= 0.5 - 0.3413$

$= 0.1587$

.iii



$$z_1 = \frac{1450 - 1500}{50} = -1$$

$$z_2 = \frac{1550 - 1500}{50} = 1$$

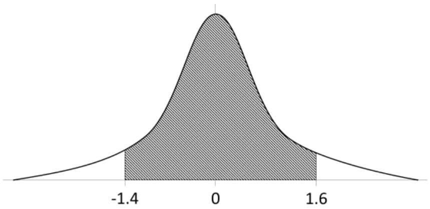
$\therefore\; p\,(1450 < x < 1550) =$

$$p\,(-1 < z < 1)$$

$$= 2\,(0.3413)$$

$$= 0.6826$$

.10



$$z_1 = \frac{7.9 - 10}{1.5} = 1.4$$

$$z_2 = \frac{12.4 - 10}{1.5} = 1.6$$

$$\therefore\ p\,(7.9 < x < 12.4) =$$

$$p\,(-1.4 < z < 1.6)$$

$$= 0.4192 + 0.4452$$

$$= 0.8644$$

.11

.i

$$z = \frac{100 - 100}{5} = 0$$

$$p\,(x > 100) = p\,(z > 0)$$

$$= 0.5$$

.ii

$$z = \frac{100 - 100}{5} = 0$$

$$p\ (x < 100) = p\ (z > 0)$$

$$= 0.5$$

.iii

$$z_1 = \frac{100 - 100}{5} = 0$$

$$z_2 = \frac{100 - 100}{5} = 2$$

$$\therefore p(100 < x < 110) =$$

$$p(0 < z < 2)$$

$$= 0.4773$$

تمارين عامة على

الاحتمالات

1- لتكن التجربة العشوائية هي اختيار عائلة لها 3 أطفال، وتسجيل هؤلاء الأطفال حسب الجنس وتسلسل الولادة، أحسب احتمال ان يكون للعائلة ولدين. (3/8)

2- إذا كان A_1 ، A_2 حادثين في الفراغ العيني S، وكان $P(A_1) = 0.5$ و $P(A_2) = 0.7$ و $P(A_1 A_2) = 0.3$:

i) هل A_1 و A_2 حادثين شاملين

(لا، لان مجموع احتماليهما لا يساوي واحد)

ii) أوجد $P(A_1$ أو $A_2)$ (0.9)

iii) أوجد $P(A_2 - A_1)$ (0.2)

iv) أوجد $P(A_1 - A_2)$ (مستحيل)

3- إذا كان A و B حادثين في الفراغ العيني S وكان $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.7$ و $P(AB) = 0.3$ احسب احتمال :

i) وقوع أحد الحادثين A أو B (0.8)

ii) وقوع A أو B وليس كليهما (0.5)

iii) عدم وقوع A (0.6)

iv) وقوع A وعدم وقوع B (0.1)

4- القي حجرا نرد مره واحده أوجد احتمالات الحوادث التالية :

i) A1 مجموع الرقمين الظاهرين 7 (6/36)

ii) A2 مجموع الرقمين الظاهرين أكثر من 10 (3/36)

iii) A3 مجموع الرقمين الظاهرين أقل من أو يساوي 5 (10/36)

iv) A4 العدد 2 ظهر مره واحده على الأقل (11/36)

5- في نفس التمرين السابق احسب الاحتمالات الاتية:

i) المجموع زوجي على فرض أن الحجر الأول 6 (3/6)

ii) الحجر الثاني 6 على فرض أن مجموع زوجي (3/18)

iii) المجموع زوجي إذا علمت أن المجموع أقل من 5 (4/6)

iv) الحجر الثاني 6 على فرض ان الأول 4 (1/6)

v) المجموع فردي إذا علمت أن الحجر الأول فردي (9/18)

6- يوجه صـيادان بندقيتيهما معا إلى غزال، فاذا كانت فرصـة كل منهما في إصـابة الغزال هي $\frac{1}{3}$

فأحسب احتمال إصابة الغزال . (5/9)

7- إذا كانت A تنسـخ 20% من خطابات المعهد، وكانت 50% من خطاباتها بدون أخطاء، بينما تنسـخ B الباقي، وكانت 90% من خطاباتها بدون أخطاء، فإذا سـحب خطاب من خطابات المعهد فاحسب احتمال أن يكون الخطاب بدون أخطاء. (0.82)

8- في السؤال السابق، إذا كان الخطاب المسحوب خطابا فيه أخطاء، فما هو احتمال أن تكون A هي التي كتبته؟ (10/18=555 0.5)

9- إذا كان احتمال نجاح الطالب في مادة الاحصاء = 0.40 كم يكون احتمال :

i) ان ينجح طالب واحد من بين 5 طلاب (0.2592)

ii) ان ينجح طالب واحد على الأقل (0.92224)

iii) ان ينجح 4 طلاب على الأكثر (0.98976)

iv) ان لا ينجح أحد (0.07776)

10- ما هو احتمال ان نحصل على مجموع 5 ثلاث مرات من رمي زهرتي نرد 6 مرات؟

(0.17342)

11- إذا كان احتمال إصابة الصاروخ للهدف 0.3 ما هو عدد الصواريخ اللازم إطلاقها كي يكون احتمال إصابة الهدف على الأقل 80%.

الحل: احتمال الخطأ = 0.7

احتمال جميع الصواريخ تخطئ = $(0.7)^n$

احتمال اصابة الهدف = $1-(0.7)^n$

المطلوب هو $1-(0.7)^n > 0.8$

$(0.7)^n > -0.2$

$(0.7)^n < 0.2$

$(0.7)^1 = 0.7$, $(0.7)^2 = 0.49$

$(0.7)^3 = 0.343$, $(0.7)^4 = 0.2401$

$(0.7)^5 = 0.16807$

$= < 0.2$

$\therefore$ $n = 5$ عدد الصواريخ

ملحق رقم (1)

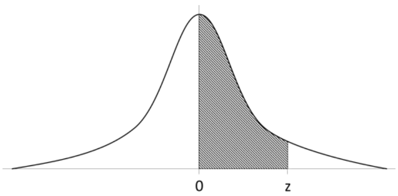
قيم الداله الاسية السالبة e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0.0	1.000	2.0	0.135	4.0	0.018	6.0	0.0025	8.0	0.00034
0.1	0.905	2.1	0.122	4.1	0.017	6.1	0.0022	8.1	0.00030
0.2	0.819	2.2	0.111	4.2	0.015	6.2	0.0020	8.2	0.00028
0.3	0.741	2.3	0.100	4.3	0.014	6.3	0.0018	8.3	0.00025
0.4	0.670	2.4	0.091	4.4	0.012	6.4	0.0017	8.4	0.00023
0.5	0.607	2.5	0.082	4.5	0.011	6.5	0.0015	8.5	0.00020
0.6	0.549	2.6	0.074	4.6	0.010	6.6	0.0014	8.6	0.00018
0.7	0.497	2.7	0.067	4.7	0.009	6.7	0.0012	8.7	0.00017
0.8	0.449	2.8	0.061	4.8	0.008	6.8	0.0011	8.8	0.00015
0.9	0.407	2.9	0.055	4.9	0.007	6.9	0.0010	8.9	0.00014
1.0	0.368	3.0	0.050	5.0	0.0067	7.0	0.0009	9.0	0.00012
1.1	0.333	3.1	0.045	5.1	0.0061	7.1	0.0008	9.1	0.00011
1.2	0.301	3.2	0.041	5.2	0.0055	7.2	0.0007	9.2	0.00010
1.3	0.273	3.3	0.037	5.3	0.0050	7.3	0.0007	9.3	0.00009
1.4	0.247	3.4	0.033	5.4	0.0045	7.4	0.0006	9.4	0.00008
1.5	0.223	3.5	0.030	5.5	0.0041	7.5	0.00055	9.5	0.00008
1.6	0.202	3.6	0.027	5.6	0.0037	7.6	0.00050	9.6	0.00007
1.7	0.183	3.7	0.025	5.7	0.0033	7.7	0.00045	9.7	0.00006
1.8	0.165	3.8	0.022	5.8	0.0030	7.8	0.00041	9.8	0.00006
1.9	0.150	3.9	0.020	5.9	0.0027	7.9	0.00037	9.9	0.00005

ملحق رقم (2)

المساحات تحت المنحنى الطبيعي

(A هي المساحة تحت المنحنى المحصورة بين 0 , z)



Z	A	Z	A	Z	A	Z	A
0.00	0.0000	0.47	0.1808	0.94	0.3264	1.41	0.4207
.01	.0040	.48	.1844	.95	.3289	1.42	.4222
.02	.0080	.49	.1879	.96	.3315	1.43	.4236
.03	.0120	.50	.1915	.97	.3340	1.44	.4251
.04	.0160	.51	.1950	.98	.3365	1.45	.4265
.05	.0199	.52	.1985	.99	.3389	1.46	.4279
.06	.0239	.53	.2019	1.00	.3413	1.47	.4292
.07	.0279	.54	.2054	1.01	.3438	1.48	.4306
.08	.0319	.55	.2088	1.02	.3461	1.49	.4319
.09	.0359	.56	.2123	1.03	.3485	1.50	.4332
.10	.0398	.57	.2157	1.04	.3508	1.51	.4345
.11	.0438	.58	.2190	1.05	.3531	1.52	.4357
.12	.0478	.59	.2224	1.06	.3554	1.53	.4370
.13	.0517	.60	.2258	1.07	.3577	1.56	.4382
.14	.0557	.61	.2291	1.08	.3599	1.55	.4394
.15	.0596	.62	.2324	1.09	.3621	1.56	.4406

.16	.0636	.63	.2357	1.10	.3643	1.57	.4418
.17	.0675	.64	.2389	1.11	.3665	1.58	.4430
.18	.0714	.65	.2422	1.12	.3686	1.59	.4441
.19	.0754	.66	.2454	1.13	.3708	1.60	.4452
.20	.0793	.67	.2486	1.14	.3729	1.61	.4463
.21	.0832	.68	.2518	1.15	.3749	1.62	.4474
.22	.0871	.69	.2549	1.16	.3770	1.63	.4485
.23	.0910	.70	.2580	1.17	.3790	1.64	.4495
.24	.0948	.71	.2612	1.18	.3810	1.65	.4505
.25	.0987	.72	.2642	1.19	.3830	1.66	.4515
.26	.1026	.73	.2673	1.20	.3849	1.67	.4525
.27	.1064	.74	.2704	1.21	.3869	1.68	.4535
.28	.1103	.75	.2734	1.22	.3888	1.69	.4545
.29	.1141	.76	.2764	1.23	.3907	1.70	.4554
.30	.1179	.77	.2794	1.24	.3925	1.71	.4564
.31	.1217	.78	2823	1.25	.3944	1.72	.4573
.32	.1255	.79	.2852	1.26	.3962	1.73	.482
.33	.1293	.80	.2881	1.27	.3980	1.74	.4591
.34	.1331	.81	.2910	1.28	.3997	1.75	.4599
.35	.1368	.82	.2939	1.29	.4015	1.76	4608
.36	.1406	.83	.2967	1.30	.4032	1.77	.4616
.37	.1443	.84	.2996	1.31	.4049	1.78	.4625
.38	.1480	.85	.3023	1.32	.4066	1.79	.4633
.39	.1517	.86	.3051	1.133	.4082	1.80	.4641

.40	.1554	.87	.3079	1.34	.4099	1.81	.4649
.41	.1591	.88	.3106	1.35	.4115	1.82	.4656
.42	.1628	.89	.3133	1.36	.4131	1.83	.4664
.43	.1664	.90	.3159	1.37	.4147	1.84	.4671
.44	.1700	.91	.3186	1.38	.4162	1.85	.4678
.45	.1736	.92	.3212	1.39	.4177	1.86	.4686
.46	.1772	.93	.3238	1.40	.4192	1.87	.4693

... يتبـع

Z	A	Z	A	Z	A	Z	A
1.88	0.4700	2.41	0.4920	2.94	0.4984	3.47	0.4997
1.89	.4706	2.42	.4922	2.95	.4984	3.48	.4998
1.90	.4713	2.43	.4925	2.96	.4985	.49	.4998
1.91	.4719	2.44	.4927	2.97	.4985	3.50	.4998
1.92	.4726	2.45	.4929	2.98	.4986	3.51	.4998
1.93	.4732	2.46	.4931	2.99	.4986	3.52	.4998
1.94	.4738	2.47	.4932	3.00	.4987	3.53	.4998
1.95	.4744	2.48	.4934	3.1	.4987	3.54	.4998
1.96	.4750	2.49	.4936	3.2	.4987	3.55	.4998
1.97	.4756	2.50	.4938	3.3	.4988	3.56	.4998
1.98	.4762	2.51	.4940	3.4	.4988	3.57	.4998
1.99	.4767	2.52	.4941	3.5	.4989	3.58	.4998
2.00	.4773	2.53	.4943	3.6	.4989	3.59	.4998
2.01	.4778	2.54	.4945	3.7	.4989	3.60	.4999
2.02	.4783	2.55	.4946	3.8	.4990	3.61	.4999

2.03	.4788	2.56	.4948	3.9	.4990	3.62	.4999
2.04	.4793	2.57	.4949	3.10	.4990	3.63	.4999
2.05	.4798	2.58	.4951	3.11	.4991	3.64	.4999
2.06	.4803	2.59	.4952	3.12	.4991	3.65	.4999
2.07	.4808	2.60	.4953	3.13	.4991	3.66	.4999
2.08	.4812	2.61	.4955	3.14	.4992	3.67	.4999
2.09	.4817	2.62	.4956	3.15	.4992	3.68	.4999
2.10	.4821	2.63	.4957	3.16	.4992	3.69	.4999
2.11	.4826	2.64	.4959	3.17	.4992	3.70	.4999
2.12	.4830	2.65	.4960	3.18	.4993	3.71	.4999
2.13	.4834	2.66	.4961	3.19	.4993	3.72	.4999
2.14	.4838	2.67	.4962	3.20	.4993	3.73	.4999
2.15	.4842	2.68	.4963	3.21	.4993	3.74	.4999
2.16	.4846	2.69	.4964	3.22	.4994	3.75	.4999
2.17	.4850	2.70	.4965	3.23	.4994	3.76	.4999
2.18	.4854	2.71	.4966	3.24	.4994	3.77	.4999
2.19	.4857	2.72	.4967	3.25	.4994	3.78	.4999
2.20	.4861	2.73	.4968	3.26	.4994	3.79	.4999
2.21	.4865	2.74	.4969	2.27	.4995	3.80	.4999
2.22	.4868	2.75	.4970	3.28	.4995	3.81	.4999
2.23	.4871	2.76	.4971	3.29	.4995	3.82	.4999
2.24	.4875	2.77	.4972	3.30	.4995	3.83	.4999
2.25	.4878	2.78	.4973	3.31	.4995	3.84	.4999
2.26	.4881	2.79	.4974	3.32	.4996	3.85	.4999

2.27	.4884	2.80	.4974	3.33	.4996	3.86	.4999
2.28	.4887	2.81	.4975	3.34	.4996	3.87	.5000
2.29	.4890	2.82	.4976	3.35	.4996	3.88	.5000
2.30	.4893	2.83	.4977	3.36	.4996	3.89	.5000
2.31	.4896	2.84	.4977	3.37	.4996		
2.32	.4898	2.85	.4978	3.38	.4996		
2.33	.4901	2.86	.4979	3.39	.4997		
2.34	.4904	2.87	.4980	3.40	.4997		
2.35	.4906	2.88	.480	3.41	.4997		
2.36	.4909	2.89	.4981	3.42	.4997		
2.37	.4911	2.90	.4981	3.43	.4997		
2.38	.4913	2.91	.4982	3.44	.4997		
2.39	.4916	2.92	.4983	3.45	.4997		
2.40	.4918	2.93	.4983	3.46	.4997		

المراجع

1. شبيجل و شيلر و سرينيفاسان؛ "الاحتمالات والاحصاء"، ملخصات شوم، ترجمة: محمود علي ابو النصر و مصطفى جلال مصطفى؛ الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة، 2004
2. مبارك اسبر ديب؛ "مباديء في الاحتمالات والاحصاء"، جامعة تشرين، دمشق، 2009
3. جامعة الملك عبدالعزيز؛ "مقدمة في الاحصاء"، الرياض، 2008
4. فريد ابو زينه وآخرون؛ "الطرق الاحصائية في التربية والعلوم الانسانية"، الطبعة الثانية، دار الفرقان للنشر والتوزيع، عمان / الاردن، 1984
5. صبري رديف العاني و سليم اسماعيل الغرابي؛ "الطرق الاحصائية" وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، بغداد / العراق، 1982
6. شفيق العتوم و فتحي عاروري؛ "الاستدلال الاحصائي وتطبيقاته في الاقتصاد والادارة"، الجامعة الاردنية، عمان / الاردن، 1986
7. لطفي هندي؛ "الاحصاء التجريبي" دار المعارف بمصر، القاهرة، 1971
8. انيس كنجو؛ " الاحصاء وطرق تطبيقه في ميادين البحث العلمي"، مؤسسة الرسالة، بيروت، 1977
9. وليم س. شيلفر؛ ترجمة احمد عبدالرحيم و سيف الدين خطار، "الاحصاء للعلوم الحياتية" جامعة البصرة، العراق، 1984
10. مدني دسوقي مصطفى؛ "مباديء في نظرية الاحتمالات والاحصاء الرياضي"، دار النهضة العربية، القاهرة، 1969

11. محمد ابو صالح و عدنان عوض؛ "مباديء في الاحصاء"، دار الفرقان للنشر، عمان، 1982

12. Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis; Introduction to Probability, Second Edition, Massachusetts Institute of Technology, 2008

13. B.V.Gnedenko; The Theory of Probability, Mir Pulishers, Moscow, 1969

14. William Feller; An Introduction to the Probability Theory and its Application, Wiley International Edition, 1968