مقارنة بعض الطرائق الكلاسيكية
لتقدير دالة البقاء لتوزيع لندلي ذو المعلمتين

م. بشير جميل خليل
وزارة التربية

أ.د. وضاح صبري ابراهيم
الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

تاريخ استلام البحث: 08 / 09 / 2022

تاريخ قبول البحوث: 12 / 10 / 2022

نشر البحث في العدد السابع عشر: ديسمبر / كانون اول 2022

رمز التصنيف ديوي / النسخة الالكترونية (Online): 2522-64X/513

رمز التصنيف ديوي / النسخة الورقية (Print): 2519-948X/513

مقارنة بعض الطرائق الكلاسيكية
لتقدير دالة البقاء لتوزيع لندلي ذو المعلمتين

م. بشير جميل خليل
وزارة التربية

أ.د. وضاح صبري ابراهيم
الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

المستخلص

قدرت في هذا البحث دالة البقاء لتوزيع لندلي ذو المعلمتين باستعمال بعض الطرائق الكلاسيكية متضمنة طريقة الإمكان الأعظم (MLE) وطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS)، ومن ثم تم إجراء مقارنة بين هذه الطرائق من خلال عملية محاكاة عند أحجام عينات مختلفة هي (50، 100، 150) ولحالات مختلفة تختلف بتغيير قيم معلمتي توزيع لندلي، فتبين أن تقديرات الطرائق الثلاثة تتمتع بخاصية الاتساق لأن قيمة MSE المرافقة لها تقل بكبر حجم العينة، كما بينت المحاكاة تفوق طريقة الإمكان الأعظم في تقدير دالة البقاء وعند جميع أحجام العينات لمعظم الحالات.

الكلمات المفتاحية: توزيع لندلي ذو المعلمتين، طريقة الإمكان الأعظم، طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية، طريقة المربعات الموزونة.

Comparison of Some Classical Methods for Estimating the Survival Function of the Two-Parameter Lindley Distribution

Abstract

In this research, the survival function of the two-parameter Lindley distribution was estimated using some classical methods, including the method of maximum likelihood estimation (MLE), method of ordinary least squares (OLS) and method of weighted least squares (WLS), and then a comparison was made between these methods through a simulation process at different sample size are (50, 100, 150) and for different cases they differ by changing the values of two parameters of the Lindley distribution. Sample sizes for most cases. It was found that the estimates of the three methods have the property of consistency because the value of the associated MSE decreases with the large sample size, and the simulation also showed the superiority of the MLE method in estimating the survival function and at all sample sizes for most cases.
Keywords: Two-Parameter Lindley Distribution, MLE Method, OLS method, WLS method.

1. المقدمة

أصبح تحليل البقاء (Survival Analysis) من الأساليب الإحصائية المهمة جداً منذ بداية القرن العشرين، حيث يعتمد هذا التحليل على توزيعات احتمالية غير سالبة وفي أغلب الأحيان تكون ملتوية نحو اليمين، ومن التوزيعات الشائعة المستعملة في هذا المجال التوزيع الأسي وتوزيع گاما وتوزيع ويبل وتوزيع رايلي ومؤخراً توزيع لندلي.

يعتبر توزيع لندلي خليطاً من التوزيع الأسي وتوزيع گاما، بنسب مختلفة لكل منهما، وبالرغم من قدم طرح هذا التوزيع من قبل لندلي في عام 1958 (Lindley, 1958) إلا أن الاهتمام به ظهر مؤخراً منذ ما يقارب العقد والنصف لذا فقد درست خواصه الإحصائية وقدرت معلماته بطرائق تقدير مختلفة من قبل العديد من الباحثين مثل (Ghitany et al., 2008) و(Jodrá, 2010). تتلخص فكرة توزيع لندلي بأنه توزيع مكون من خلط توزيعين مستمرين (الأول أسي (Exponential Distribution) والثاني گاما Gamma Distribution) مع أوزان مختلفة. حيث الصيغة العامة له ستكون:

$$f(x;\theta) = wf_1(x;\theta) + (1-w)f_2(x;\theta) \qquad \dots(1)$$

حيث إن:

$$f_1(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad ; \quad f_2(x;\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x} \qquad \dots(2)$$

وبذلك فإن الدالة الناتجة هي:

$$f(x;\theta) = w\theta e^{-\theta x} + (1-w)\theta^2 x e^{-\theta x} \qquad \dots(3)$$

وقد استعمل (Lindley, 1958) الوزن $w = \theta/(\theta+1)$ وبذلك فأن دالة الكثافة الاحتمالية ستكون:

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^2}{\theta+1}(1+x)e^{-\theta x} \qquad ,x>0\,,\theta \geq 0 \qquad \dots(4)$$

يتكون توزيع لندلي من معلمة واحدة وهذا يجعله ذي مرونة أقل مقارنة مع التوزيعات التي تحتوي على عدد أكبر من المعلمات لذا فقد ظهرت تعميمات عديدة لهذا التوزيع، وهذه التعميمات بعدد مختلف من المعلمات فبعضها ذو معلمتين والآخر ذو ثلاثة والبعض وصل إلى خمس معلمات (Tharshan & Wijekoon, 2020). فقد اقترح توزيع لندلي ذو معلمتين من قبل (Shanker et al., 2013) بالإضافة إلى دراسة خواصه وتقدير معلماته باستعمال طريقة الإمكان الأعظم، كما قدرت معلماته بطريقة بيز للبيانات المضببة من قبل (Al-Bayati, 2018) بأسلوب تقريب لندلي وقدر (Yilmaz et al., 2018) معلمتي التوزيع بطريقة الإمكان الأعظم والعزوم الخطية (L-Moments) والعزوم الخطية المقلصة (TL-Moments)، وفي هذا البحث سيتم التقدير بطريقة MLE وOLS وWLS ومن ثم مقارنة هذه الطرائق باستعمال معيار MSE.

وقد تم تقسيم البحث إلى عدة أقسام تضمن القسم الأول المقدمة والثاني دراسة توزيع لندلي ذو المعلمتين من حيث توضيح آلية الحصول عليه بالإضافة إلى دوال مهمة كدالة الكثافة الاحتمالية ودالة التجميع التراكمية ودالة البقاء، بينما خصص القسم الثالث لطرائق التقدير، والقسم الرابع لعملية المحاكاة والمقارنة بين الطريقتين، والقسم الخامس تضمن الاستنتاجات.

2. توزيع لندلي ذو المعلمتين

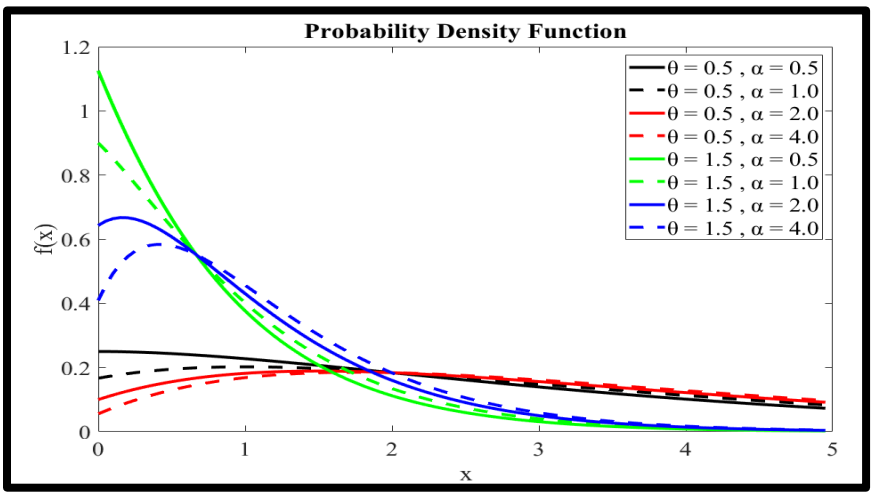
اقترح توزيع لندلي ذي المعلمتين من قبل (Shanker et al., 2013) في عام 2013 وقد استعمل الباحثون الوزن $w = \frac{\theta}{\theta+\alpha}$ بنفس التوزيعات المستعملة في توزيع لندلي ذو معلمة واحدة وكما يأتي:

$$f(x;\alpha,\theta) = \frac{\theta}{\theta+\alpha}\theta e^{-\theta x} + \frac{\alpha}{\theta+\alpha}\theta^2 x e^{-\theta x} \qquad \dots(5)$$

وبذلك فإن دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يتبع توزيع لندلي ذي المعلمتين هي:

$$f(x;\alpha,\theta) = \frac{\theta^2}{\theta+\alpha}(1+\alpha x)e^{-\theta x} \quad , x > 0 \, , \theta \geq 0, \alpha > -\theta \qquad \dots(6)$$

وسيتم رسم هذه الدالة عند قيم مختلفة للمعلمة α وبنفس قيم المعلمة θ الواردة في الشكل (1-2) وكما في الأشكال الآتية:



الشكل (1): يمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لندلي ذي المعلمتين عند قيم مختلفة للمعلمات

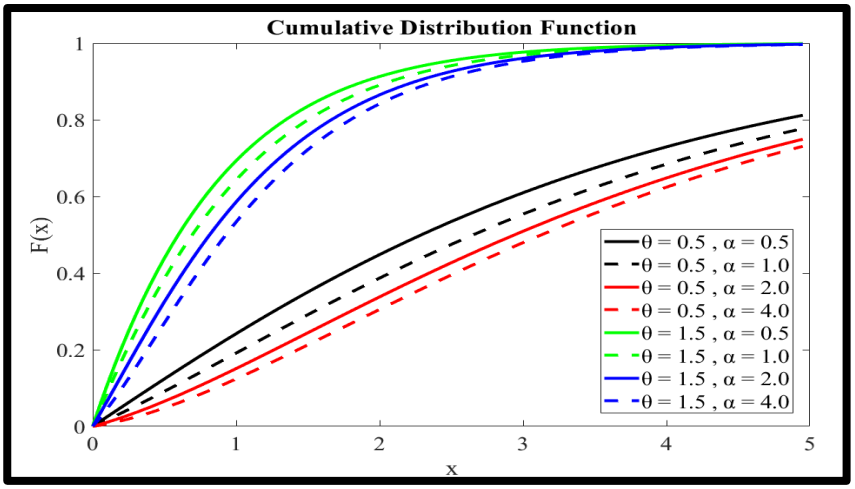
كما أن دالة التوزيع التراكمية لتوزيع لندلي ذي المعلمتين يمكن الحصول عليها كما يأتي:

$$F(x;\theta,\alpha) = \int_0^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{\theta^2}{\theta+\alpha}(1+\alpha t)e^{-\theta t}dt = \frac{\theta^2}{\theta+\alpha}\int_{-\infty}^{x}(1+\alpha t)e^{-\theta t}dt$$

بحل التكامل فأن الدالة التراكمية ستكون:

$$F(x;\theta,\alpha) = 1 - \left[\frac{\theta+\alpha+\alpha\theta x}{\theta+\alpha}\right]e^{-\theta x}$$
$$x > 0 \, , \theta \geq 0, \alpha > -\theta \qquad \dots(7)$$

والشكل لآتي يوضح دالة التوزيع التراكمية عند قيم مختلفة للمعلمات.



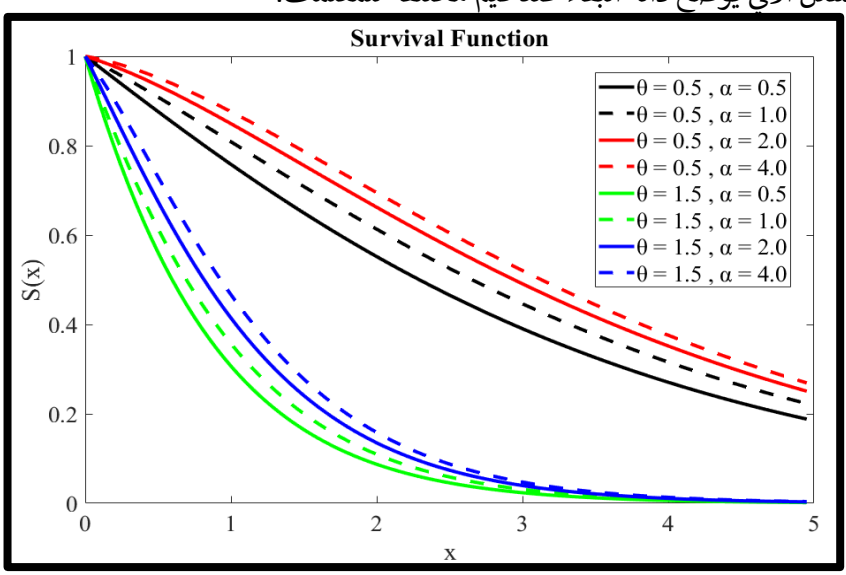
الشكل (2): يمثل دالة التوزيع التراكمية لتوزيع لندلي ذي المعلمتين عند قيم مختلفة للمعلمات.

تعرف دالة البقاء (Survival Function) بأنها احتمال بقاء كائن معين حياً حتى الوقت t، ويمكن الحصول عليه من خلال دالة التوزيع التراكمية وكما يأتي:

$$S(x;\theta,\alpha) = 1 - F(x;\theta,\alpha) = 1 - \left\{1 - \left[\frac{\theta + \alpha + \alpha\theta x}{\theta + \alpha}\right] e^{-\theta x}\right\}$$

$$\therefore S(x;\theta,\alpha) = \left[\frac{\theta + \alpha + \alpha\theta x}{\theta + \alpha}\right] e^{-\theta x}\,, x > 0\,, \theta \geq 0, \alpha > -\theta \qquad \dots (8)$$

والشكل الآتي يوضح دالة البقاء عند قيم مختلفة للمعلمات.



الشكل (3) يمثل دالة البقاء لتوزيع لندلي ذي المعلمتين عند قيم مختلفة للمعلمات

3. طرائق التقدير

تتلخص فكرة طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Estimation (MLE) في إيجاد القيمة التي تجعل لوغاريتم دالة الإمكان أكبر ما يمكن ودالة الإمكان بالنسبة لتوزيع لندلي ذو المعلمتين يكون كالآتي (Shanker et al., 2013):

$$L(\theta,\alpha)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\theta^2}{\theta+\alpha}(1+\alpha x_i)e^{-\theta x_i}\right]=\left(\frac{\theta^2}{\theta+\alpha}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha x_i)\,e^{-n\theta\overline{x}} \quad \dots(9)$$

وبالنسبة للوغاريتم دالة الإمكان فأنه:

$$\ell(\theta,\alpha)=ln[L(\theta,\alpha)]$$

$$=2nln\theta-nln(\theta+\alpha)+\sum_{i=1}^{n}ln(1+\alpha x_i)-n\theta\overline{x} \quad \dots(10)$$

الآن يتم اشتقاق لوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة لمعلمتي التوزيع، وكما يأتي:

$$\frac{\partial\ell(\theta,\alpha)}{\partial\theta}=\frac{2n}{\hat{\theta}}-\frac{n}{\hat{\theta}+\hat{\alpha}}-n\overline{x}=0 \quad \dots(11)$$

$$\frac{\partial\ell(\theta,\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{-n}{\hat{\theta}+\hat{\alpha}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+\hat{\alpha}x_i}=0 \quad \dots(12)$$

يتم الحصول على مقدرات الإمكان الأعظم لكل من θ,α بعد حل المعادلتين (11) و(12) بطريقة نيوتن رافسون، ويمكن الحصول على دالة البقاء المقدرة بطريقة الإمكان الأعظم عن طريق تعويض التقديرات التي يتم الحصول عليها من حل المعادلتين (11) و(12) في دالة البقاء لتوزيع لندلي ذو المعلمتين والتي سبق تعريفها في المعادلة (8) وكما يأتي:

$$\hat{S}_{ML}=\left[\frac{\hat{\theta}_{ML}+\hat{\alpha}_{ML}+\hat{\alpha}_{ML}\hat{\theta}_{ML}x}{\hat{\theta}_{ML}+\hat{\alpha}_{ML}}\right]e^{-\hat{\theta}_{ML}x} \quad \dots(13)$$

حيث إن:

$\hat{\theta}_{ML}$: تقدير الإمكان الأعظم للمعلمة θ.

$\hat{\alpha}_{ML}$: تقدير الإمكان الأعظم للمعلمة α.

وبالنسبة لطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) فأن فكرتها تتلخص في تصغير الفرق بين الدالة التراكمية التجريبية (The Empirical Distribution Function) والدالة التراكمية النظرية (The Theoretical Distribution Function) للمشاهدات المرتبة، وكما يأتي (Swain et al., 1988):

$$OL=\sum_{i=1}^{n}\{F(x_{(i)})-\mathcal{F}(i)\}^2 \quad \dots(14)$$

حيث تمثل $F(x_{(i)})$ الدالة التراكمية للمشاهدة $x_{(i)}$ للتوزيع محل الدراسة، و$\mathcal{F}(i)$ تمثل التراكمية النظرية والتي يتم تقديرها في الكثير من الأحيان عن طريق $\mathcal{F}(i)=\frac{i}{n+1}$ فتكون الدالة كالآتي:

$$OL = \sum_{i=1}^{n} \left\{ F\left(x_{(i)}\right) - \frac{i}{n+1} \right\}^2 \quad \dots (15)$$

الآن سيتم إيجاد مقدر المربعات الصغرى الاعتيادية لمعلمتي توزيع لندلي ذو المعلمتين:

$$OL(\theta,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\theta + \alpha + \alpha\theta x_{(i)}}{\theta + \alpha} \right] e^{-\theta x_{(i)}} - \frac{n+1-i}{n+1} \right\}^2 \quad \dots (16)$$

بتصغير هذه الدالة بالنسبة لمعلمات التوزيع نحصل على مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية، وكما يأتي:

$$\frac{\partial OL(\theta,\alpha)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\hat{\theta} + \hat{\alpha} + \hat{\alpha}\hat{\theta} x_{(i)}}{\hat{\theta} + \hat{\alpha}} \right] e^{-\hat{\theta} x_{(i)}} - \frac{n+1-i}{n+1} \right\} \left\{ \hat{\theta} x_{(i)} + \hat{\theta}\hat{\alpha} x_{(i)}^2 + 2\hat{\alpha} x_{(i)}^2 + \hat{\alpha}^2 x_{(i)} \right\} e^{-\hat{\theta} x_{(i)}} = 0 \quad \dots (17)$$

$$\frac{\partial OL(\theta,\alpha)}{\partial\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\hat{\theta} + \hat{\alpha} + \hat{\alpha}\hat{\theta} x_{(i)}}{\hat{\theta} + \hat{\alpha}} \right] e^{-\hat{\theta} x_{(i)}} - \frac{n+1-i}{n+1} \right\} x_{(i)}\, e^{-\hat{\theta} x_{(i)}} = 0 \quad \dots (18)$$

يتم الحصول على مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية لكل من θ, α بعد حل المعادلتين (17) و(18) بطريقة نيوتن رافسون، ويمكن الحصول على دالة البقاء المقدرة بهذه الطريقة عن طريق تعويض التقديرات التي يتم الحصول عليها من حل المعادلتين (17) و(18) في دالة البقاء لتوزيع لندلي ذو المعلمتين والتي سبق تعريفها في المعادلة (8) وكما يأتي:

$$\hat{S}_{OLS} = \left[\frac{\hat{\theta}_{OLS} + \hat{\alpha}_{OLS} + \hat{\alpha}_{OLS}\hat{\theta}_{OLS} x}{\hat{\theta}_{OLS} + \hat{\alpha}_{OLS}} \right] e^{-\hat{\theta}_{OLS} x} \quad \dots (19)$$

حيث إن:

$\hat{\theta}_{OLS}$: تقدير المربعات الصغرى الاعتيادية للمعلمة θ.

$\hat{\alpha}_{OLS}$: تقدير المربعات الصغرى الاعتيادية للمعلمة α.

أما بالنسبة لطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) فأن فكرتها تكمن في تصغير الفرق بين الدالة التراكمية التجريبية والدالة التراكمية النظرية للمشاهدات المرتبة، وكما يأتي (Swain et al., 1988):

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_i \left\{ F\left(x_{(i)}\right) - \mathcal{F}(i) \right\}^2 \quad \dots (20)$$

حيث إن:

$$w_i = \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n+1-i)} \quad \dots (21)$$

$$\Rightarrow W(\theta,\alpha) = (n+1)^2(n + 2)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\{\left[\frac{\theta+\alpha+\alpha\theta x_{(i)}}{\theta+\alpha}\right]e^{-\theta x_{(i)}} - \frac{n+1-i}{n+1}\right\}^2}{i(n+1-i)} \quad \dots(22)$$

بتصغير هذه الدالة بالنسبة لمعلمات التوزيع نحصل على مقدرات المربعات الصغرى الموزونة، وكما يأتي:

$$\frac{\partial W(\theta,\alpha)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{i(n+1-i)}\right\}\left\{\left[\frac{\hat\theta+\hat\alpha+\hat\alpha\hat\theta x_{(i)}}{\hat\theta+\hat\alpha}\right]e^{-\hat\theta x_{(i)}} - \frac{n+1-i}{n+1}\right\}\{\hat\theta x_{(i)} + \hat\theta\hat\alpha x_{(i)}^2 + 2\hat\alpha x_{(i)}^2 + \hat\alpha^2 x_{(i)}\}e^{-\hat\theta x_{(i)}} = 0 \quad \dots(23)$$

$$\frac{\partial W(\theta,\alpha)}{\partial\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{i(n+1-i)}\right\}\left\{\left[\frac{\hat\theta+\hat\alpha+\hat\alpha\hat\theta x_{(i)}}{\hat\theta+\hat\alpha}\right]e^{-\hat\theta x_{(i)}} - \frac{n+1-i}{n+1}\right\}x_{(i)}\,e^{-\hat\theta x_{(i)}} = 0 \quad \dots(24)$$

يتم الحصول على مقدرات المربعات الصغرى الموزونة لكل من θ,α بعد حل المعادلتين (23) و(24) بطريقة نيوتن رافسون، ويمكن الحصول على دالة البقاء المقدرة بهذه الطريقة عن طريق تعويض التقديرات التي يتم الحصول عليها من حل المعادلتين (23) و(24) في دالة البقاء لتوزيع لندلي ذو المعلمتين والتي سبق تعريفها في المعادلة (8) وكما يأتي:

$$\hat S_{WLS} = \left[\frac{\hat\theta_{WLS}+\hat\alpha_{WLS}+\hat\alpha_{WLS}\hat\theta_{WLS}x}{\hat\theta_{WLS}+\hat\alpha_{WLS}}\right]e^{-\hat\theta_{WLS}x} \quad \dots(25)$$

حيث إن:

$\hat\theta_{WLS}$: تقدير المربعات الصغرى الموزونة للمعلمة θ.

$\hat\alpha_{WLS}$: تقدير المربعات الصغرى الموزونة للمعلمة α.

4. المحاكاة

تم إجراء عملية محاكاة شاملة لتوليد بيانات تتبع توزيع لندلي ذو المعلمتين، وبناءً على هذه البيانات تم تقدير المعلمات ودالة البقاء بطريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومن ثم المقارنة بين هذه الطرائق باستخدام معيار MSE. وقد تم توليد البيانات بواسطة بالدالة الكمية (Quantile Function) لتوزيع لندلي ذي المعلمتين والتي يتم الحصول عليها كما يأتي:

$$F(x) = 1 - \left[\frac{\theta+\alpha+\alpha\theta x}{\theta+\alpha}\right]e^{-\theta x} = u$$
$$\Rightarrow 1-u = \left[\frac{\theta+\alpha+\alpha\theta x}{\theta+\alpha}\right]e^{-\theta x}$$
$$\Rightarrow (\theta+\alpha)(1-u) = [\theta+\alpha+\alpha\theta x]e^{-\theta x}$$
$$\Rightarrow \frac{(\theta+\alpha)(1-u)}{\alpha} = \left[\frac{\theta+\alpha}{\alpha}+\theta x\right]e^{-\theta x}$$

$$\Rightarrow \frac{(\theta+\alpha)(1-u)e^{-\frac{(\theta+\alpha)}{\alpha}}}{\alpha} = \left[\frac{\theta+\alpha}{\alpha}+\theta x\right]e^{-\left(\theta x+\frac{(\theta+\alpha)}{\alpha}\right)}$$

$$\Rightarrow -\frac{(\theta+\alpha)(1-u)e^{-\frac{(\theta+\alpha)}{\alpha}}}{\alpha} = -\left[\frac{\theta+\alpha}{\alpha}+\theta x\right]e^{-\left(\theta x+\frac{(\theta+\alpha)}{\alpha}\right)}$$

$$\Rightarrow W_{-1}\left[-\frac{(\theta+\alpha)(1-u)e^{-\frac{(\theta+\alpha)}{\alpha}}}{\alpha}\right] = -\left[\frac{\theta+\alpha}{\alpha}+\theta x\right]$$

$$\Rightarrow -W_{-1}\left[-\frac{(\theta+\alpha)(1-u)e^{-\frac{(\theta+\alpha)}{\alpha}}}{\alpha}\right] = \left[\frac{\theta+\alpha}{\alpha}+\theta x\right]$$

$$\Rightarrow -W_{-1}\left[-\frac{(\theta+\alpha)(1-u)e^{-\frac{(\theta+\alpha)}{\alpha}}}{\alpha}\right] - \left[\frac{\theta+\alpha}{\alpha}\right] = \theta x$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{\theta}W_{-1}\left[-\frac{(\theta+\alpha)(1-u)e^{-\frac{(\theta+\alpha)}{\alpha}}}{\alpha}\right] - \left[\frac{\theta+\alpha}{\theta\alpha}\right] \qquad \dots(26)$$

حيث إن $W_{-1}(.)$ تمثل دالة لامبرت (Lambert W Function) ذو الفرع السالب.

أجريت عملية التوليد بالنسبة لأربعة حالات مختلفة كما موضح في الجدول 1، ولكل حالة تم استخدام أحجام عينة مختلفة (150 ,100 ,50). تم تكرار التجربة 1000 لكل حالة من الحالات الأربعة، بعد ذلك تم إجراء عملية التقدير بطرائق التقدير الثلاثة، والمقارنة بينهما باستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ MSE. جميع هذه العمليات تمت في بيئة R.

الجدول 1. النماذج المختلفة للمحاكاة

Models	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{\alpha}$
1	0.5	0.5
2	0.5	2
3	1.5	0.5
4	1.5	2

والجداول الآتية توضح نتائج عملية المحاكاة:

الجدول 2. القيم التقديرية لدالة البقاء وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير المختلفة عندما θ=0.5, α=0.5

Sample Size	t	Real	MLE	OLS	WLS	Best
n=50	0.05	0.9875	0.98859	0.98889	0.98889	MLE
	0.5	0.87615	0.88018	0.88435	0.88414	
	1.5	0.6495	0.64211	0.65507	0.65405	
	3.5	0.32583	0.30483	0.32159	0.31989	
	5	0.18469	0.16741	0.181	0.17963	
	MSE	-	0.01211	0.01756	0.01589	
n=100	0.05	0.9875	0.98837	0.98856	0.98857	MLE
	0.5	0.87615	0.88001	0.88253	0.8826	
	1.5	0.6495	0.64624	0.65388	0.65395	
	3.5	0.32583	0.31149	0.3211	0.32137	
	5	0.18469	0.17192	0.17942	0.17982	
	MSE	-	0.00652	0.00804	0.00859	
n=150	0.05	0.9875	0.98839	0.98854	0.98854	WLS
	0.5	0.87615	0.88062	0.88244	0.88235	
	1.5	0.6495	0.64853	0.65382	0.65334	
	3.5	0.32583	0.31363	0.32028	0.31934	
	5	0.18469	0.17273	0.17789	0.1769	
	MSE	-	0.0042	0.00496	0.00365	

نلاحظ من الجدول (2) أن طريقة الإمكان الأعظم (MLE) أفضل عند حجم عينة 50 و100 بينما طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) أفضل عند حجم العينة 150.

الجدول 3. القيم التقديرية لدالة البقاء وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير المختلفة عندما θ=0.5, α=2.0

Sample Size	t	Real	MLE	OLS	WLS	Best
n=50	0.05	0.99482	0.99332	0.99336	0.99341	MLE
	0.5	0.93456	0.92145	0.9231	0.92339	
	1.5	0.75579	0.72908	0.73716	0.7369	
	3.5	0.41706	0.39528	0.41091	0.40862	
	5	0.24625	0.23528	0.25208	0.24858	
	MSE	-	0.01353	0.02611	0.02019	
n=100	0.05	0.99482	0.99415	0.99417	0.9942	MLE
	0.5	0.93456	0.92811	0.92958	0.92961	
	1.5	0.75579	0.7406	0.74827	0.74749	
	3.5	0.41706	0.40211	0.41749	0.41478	
	5	0.24625	0.23729	0.25371	0.2501	
	MSE	-	0.00726	0.01884	0.01393	
n=150	0.05	0.99482	0.99439	0.9944	0.99442	MLE
	0.5	0.93456	0.93002	0.93151	0.93143	
	1.5	0.75579	0.74414	0.75212	0.7509	
	3.5	0.41706	0.40458	0.42091	0.41721	
	5	0.24625	0.23834	0.25576	0.251	
	MSE	-	0.00554	0.01795	0.01172	

نلاحظ من الجدول (3) أن طريقة الإمكان الأعظم (MLE) أفضل عند أحجام العينات المختلفة

الجدول 4. القيم التقديرية لدالة البقاء وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير المختلفة عندما θ=1.5, α=0.5

Sample Size	t	Real	MLE	OLS	WLS	Best
n=50	0.05	0.94514	0.95194	0.95212	0.95236	MLE
	0.5	0.56094	0.57107	0.57326	0.57451	
	1.5	0.16469	0.15216	0.15345	0.15449	
	3.5	0.01213	0.00969	0.0096	0.00979	
	5	0.00159	0.00131	0.00127	0.0013	
	MSE	-	0.00594	0.00619	0.00605	
n=100	0.05	0.94514	0.95	0.9501	0.95025	MLE
	0.5	0.56094	0.56735	0.56822	0.56904	
	1.5	0.16469	0.1522	0.15262	0.15328	
	3.5	0.01213	0.00933	0.00926	0.00937	
	5	0.00159	0.00117	0.00115	0.00117	
	MSE	-	0.00296	0.00307	00.003	
n=150	0.05	0.94514	0.94863	0.94873	0.94883	MLE
	0.5	0.56094	0.56625	0.567	0.56749	
	1.5	0.16469	0.15638	0.15668	0.15711	
	3.5	0.01213	0.01018	0.01009	0.01018	
	5	0.00159	0.00131	0.00128	0.0013	
	MSE	-	0.00199	0.00211	0.00205	

نلاحظ من الجدول (4) أن طريقة الإمكان الأعظم (MLE) أفضل عند أحجام العينات المختلفة

الجدول 5. القيم التقديرية لدالة البقاء وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير المختلفة عندما θ=1.5, α=2.0

Sample Size	t	Real	MLE	OLS	WLS	Best
n=50	0.05	0.9675	0.96729	0.96755	0.96771	WLS
	0.5	0.67481	0.6655	0.66875	0.66964	
	1.5	0.24091	0.22991	0.23324	0.23409	
	3.5	0.02099	0.02152	0.02175	0.022	
	5	0.00292	0.00362	0.00361	0.00368	
	MSE	-	0.00559	0.00508	0.00498	
n=100	0.05	0.9675	0.96795	0.96839	0.96842	WLS
	0.5	0.67481	0.66985	0.67425	0.67419	
	1.5	0.24091	0.23205	0.23692	0.23675	
	3.5	0.02099	0.02083	0.02148	0.02149	
	5	0.00292	0.00329	0.00338	0.00339	
	MSE	-	0.00315	0.00297	0.00289	
n=150	0.05	0.9675	0.96815	0.9685	0.96852	WLS
	0.5	0.67481	0.67136	0.67507	0.67502	
	1.5	0.24091	0.23299	0.23711	0.23696	
	3.5	0.02099	0.02051	0.02102	0.02103	
	5	0.00292	0.00312	0.00318	0.00318	
	MSE	-	0.00239	0.00214	0.00211	

نلاحظ من الجدول (5) أن طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) أفضل عند أحجام العينات المختلفة.
والملاحظ من الجداول من (2) إلى (5) أن طريقة الإمكان الأعظم أفضل في معظم الحالات باستثناء عندما تتزايد قيم المعلمات، فأن طريقة WLS تكون أفضل، كما يلاحظ أن أداء الطرائق عموماً يتقارب بزيادة حجم العينات، ويلاحظ أيضاً أن تقديرات الطرائق الثلاثة تمتلك خاصية الاتساق وذلك لأن قيم MSE لها جميعاً ينقص بزيادة حجم العينة وبمختلف الحالات سواءً قيم صغيرة للمعلمات أو قيم أكبر.

5. الاستنتاجات

نستنتج مما سبق ما يأتي:

1. تمتلك مقدرات الطرائق الثلاثة خاصية الاتساق.
2. أفضلية طريقة الإمكان الأعظم في معظم الحالات يليها طريقة المربعات الصغرى الموزونة.
3. تقارب أداء الطرائق الثلاثة بزيادة حجم العينة.

6. المصادر References

1. Al-Bayati, Rasha Sameer Subhi, (2018). **Some Estimation Methods for Lindley Distribution**. A Master Thesis, College of Science, Mustansiriyah University, Baghdad, Iraq.
2. Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). **Lindley distribution and its application**. Mathematics and computers in simulation, 78(4), 493-506.
3. Jodrá, P. (2010). **Computer generation of random variables with Lindley or Poisson–Lindley distribution via the Lambert W function**. Mathematics and Computers in Simulation, 81(4), 851-859.
4. Lindley, D.V. (1958). **Fiducial Distribution and Bayes Theorem**. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 20(1),102-107.
5. Shanker, R., Sharma, S., & Shanker, R. (2013). **A two-parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data**. Applied Mathematics 4: 363-368.
6. Swain, J. J., Venkatraman, S., & Wilson, J. R. (1988). **Least-squares estimation of distribution functions in Johnson's translation system**. Journal of Statistical Computation and Simulation, 29(4), 271-297.
7. Tharshan, R., & Wijekoon, P. (2020). **A comparison study on a new five-parameter generalized Lindley distribution with its sub-models**. STATISTICS, 89.
8. Yilmaz, A., Kara, M., & Aydoğdu, H. (2018). **L Moment And TL-Moment Estimation for Two Parameter Lindley Distribution and Its Application**. In Book of Abstracts (p. 789).